外心に関する論証

　三角形 ABC の外心 (外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし，α，β，γ は

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たす正の数であるとする。また，直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を A′，B′，C′ とする。

　三角形 A′B′C′ の外心が O に一致すれば，$\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。

＜ ’01 名古屋大 ＞

【戦略】

O が △A′B′C′ の外心であるという条件を翻訳しようと思ったら

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$$

と繋ぐことになります。

このことを踏まえると，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表したいという気持ちが湧いてくると思います。

とは言え，例えば，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ というのは $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ という形であることは見るからに分かります。

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\triangle\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\triangledown\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ という形になるわけですから，最終的に $|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$ と繋いだときに

$$|\,\square\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,|=|\,\triangle\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,|=|\,\triangledown\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,|$$

という形になり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ ですから

$$|\,\square\,|=|\,\triangle\,|=|\,\triangledown\,|$$

という形に持ち込めそうです。

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を求めようとなると，A′ が $\begin{cases}\text{直線 OA 上}\\\text{直線 BC 上}\end{cases}$ という 2 点を翻訳すればよいでしょう。

対称性 (この場合，A，B，C に関する一般性と言った方がよいかもしれません) を利用すれば $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ も全く同様の手順で求められます。

これを実行すると $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$ という関係式を Get できると思います。

これは比例式ですから，セオリー通り $=k$ とでもおいて処理すればよいでしょう。

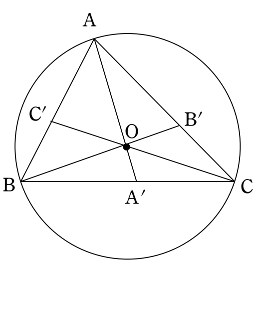
【解答】

A′ について $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ …① と表せる。

一方 A′ は線分 BC 上の点なので

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …② と表せる。

①，② より $a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



$a\neq 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1-t}{a}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{t}{a}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

これを $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ に代入すると

$$\alpha\left(\frac{1-t}{a}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{a}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

これを整理すると $\left\{\dfrac{(1-t)\,\alpha}{a}+\beta\right\}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(\dfrac{t\alpha}{a}+\gamma\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であるから，$\begin{cases}\dfrac{(1-t)\,\alpha}{a}+\beta=0 \cdots ③\\[2mm] \dfrac{t\alpha}{a}+\gamma=0 \cdots ④\end{cases}$

③+④ より $\dfrac{\alpha}{a}+\beta+\gamma=0$ で，$a=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$ を得る。

したがって，① より $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を得る。

今，O が △A′B′C′ の外心であるときを考えるので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$$

これより，$\left|-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$

$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ より，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\,|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

今，O は △ABC の外心なので，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=k$ (>0) とおくと，

$\begin{cases}\alpha=k(\beta+\gamma)\\ \beta=k(\gamma+\alpha)\\ \gamma=k(\alpha+\beta)\end{cases}$ で，辺々加えると，$\alpha+\beta+\gamma=2k(\alpha+\beta+\gamma)$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ なので，$2k=1$，すなわち $k=\dfrac{1}{2}$

このとき $\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\\[2mm] \beta=\dfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)\\[2mm] \gamma=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\end{cases}$，すなわち $\begin{cases}\beta+\gamma=2\alpha \cdots ③\\ \gamma+\alpha=2\beta \cdots ④\\ \alpha+\beta=2\gamma \cdots ⑤\end{cases}$

③−④ より，$\beta-\alpha=2\alpha-2\beta$ で，これより $\alpha=\beta$

④−⑤ より，$\gamma-\beta=2\beta-2\gamma$ で，これより $\beta=\gamma$

以上から，$\alpha=\beta=\gamma$ となり，題意は示された。

【戦略２】～ $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$ を得た後 ～

比例式の扱いを忘れてしまっていたら（あってはなりませんが），対称性を利用して処理することになります。

ただ，セオリーから外れる分，アクロバティックな変形をする必要があります。

【部分的別解】

辺々逆数をとると，$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}=\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

辺々 1 を加えると $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+1=\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+1=\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+1$

すなわち $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ なので $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma}$，すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ となる。

【総括】

戦略的には $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\triangle\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\triangledown\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表しにいき

$$|\square|=|\triangle|=|\triangledown|$$

と繋いでいく路線は睨みたいところです。

本問の結果から

$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の外心が一致したとき

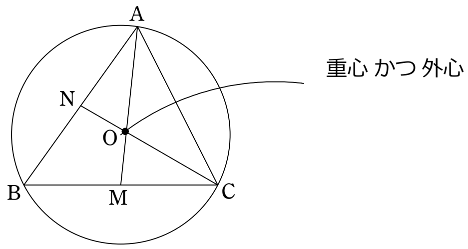
$$\alpha\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\vec{0}$$

ということが言え，$\alpha>0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が得られます。

これは $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\vec{0}$ と見ることができるので，O は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心と言うことになります。

つまり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心と外心は一致することを意味し，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることになります。

注意　重心と外心が一致する三角形が正三角形となることの証明



$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心と外心が一致しているとします。

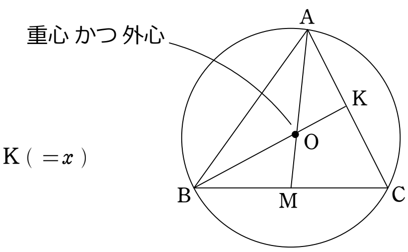
外心の性質から $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$（$=2x$ とおきます）

重心の性質から $\mathrm{OM}=\mathrm{ON}$（$=x$）

対頂角は等しく，$\angle\mathrm{AON}=\angle\mathrm{COM}$

よって，$\triangle\mathrm{AON}\equiv\triangle\mathrm{COM}$ が言えるため，$\mathrm{AN}=\mathrm{CM}$

N，M はそれぞれ辺 AB，BC の中点であるため，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$



同様に見て

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$（$=2x$），$\mathrm{OM}=\mathrm{OK}$（$=x$）
$\angle\mathrm{AOK}=\angle\mathrm{BOM}$

ゆえに，$\triangle\mathrm{AOK}\equiv\triangle\mathrm{BOM}$ で，$\mathrm{AK}=\mathrm{BM}$

M，K はそれぞれ，辺 BC，CA の中点より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

以上から $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形