1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし，高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとり得る値の範囲を求めよ。

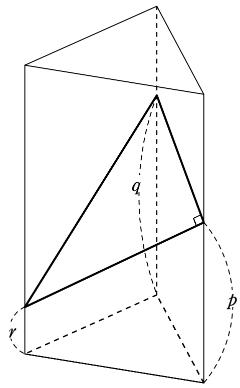
＜ '00 東京工業大 ＞

【戦略】

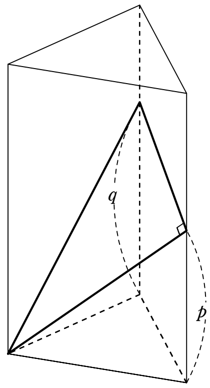
まずは変数の設定です。

一番素直な設定としては 3 頂点の高さを p，q，r と設定することでしょうか。(図 1)

ただ，この三角形を床に落とすことで，p，q という 2 変数で考えればもう少しサボることができます。(図 2)



(図 1)



(図 2)

もちろん，この p，q は従属ですから，最終的には p，q の関係を縛っている「直角三角形」という条件から p，q の関係式を出して，文字消去すれば，1 変数関数のとり得る値の範囲なので，微分すればよいでしょう。

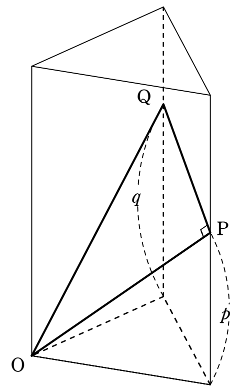
文字消去する際には「遺産の整理」ということを忘れずに，p の範囲をきちんと出しましょう。

※ 消える文字が生前持っていた条件を，生き残る文字に引き継がせる。

【解答】

1 つの頂点を底面上にとっても一般性を失わない。

また右図において，$0 \leqq p \leqq q \leqq 2$ …(*)
で考えても一般性を失わない。



$$\mathrm{OP} = \sqrt{1+p^2}$$
$$\mathrm{OQ} = \sqrt{1+q^2}$$
$$\mathrm{PQ} = \sqrt{1+(q-p)^2}$$

題意の直角三角形 OPQ において
(*) より $\mathrm{OP} \leqq \mathrm{OQ}$，$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{OQ}$ であり，
OQ が最大辺となる。

大小まで設定したおかげで最大辺を特定することができました。

よって，$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OQ}^2$

$(1+p^2) + \{1+(q-p)^2\} = 1+q^2$

これを整理すると $2pq = 1+2p^2$

$p=0$ とすると，$0=1$ となり不合理だから，$p \fallingdotseq 0$

このとき $q = p + \dfrac{1}{2p}$ …①

(*) より $0 < p \leqq p + \dfrac{1}{2p} \leqq 2$

(これは $p>0$ かつ $p \leqq p + \dfrac{1}{2p} \leqq 2$ ということを意味する)

$p>0$ より，$p \leqq p + \dfrac{1}{2p}$ は必ず成り立つから，$p + \dfrac{1}{2p} \leqq 2$

$p>0$ より分母を払うと $2p^2 - 4p + 1 \leqq 0$ となり，

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leqq p \leqq \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \cdots ②$$

△OPQ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OP} \cdot \mathrm{PQ} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+(q-p)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+\frac{1}{4p^2}} \quad (\because ①) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + \frac{1}{4p^2} + \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$p^2 = t$ とおくと，② より $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ であり

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{t + \frac{1}{4t} + \frac{5}{4}}$$

$f(t)=t+\dfrac{1}{4t}+\dfrac{5}{4}$ とおくと，$f'(t)=1-\dfrac{1}{4t^2}=\dfrac{(2t+1)(2t-1)}{4t^2}$

t	$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

よって，$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ の範囲で，$\dfrac{9}{4}\leqq f(t)\leqq\dfrac{17}{4}$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{4}}\leqq S\leqq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17}{4}}$ ，すなわち $\dfrac{3}{4}\leqq \mathrm{S}\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ …答

【総括】

状況設定をする際には，「どの分野の問題とするのか」「何を変数にとるのか」ということを自分で考えて設定することが必要になります。

標準レベルの入試問題では問題文で「〜〜 を x とする」という設定が決められているのですが，トップレベルになると，それを自分で考えるところまで求められます。

本問の場合，「変数の設定」「大小関係の設定」などが必要になりました。

ただ，それを理解することはできても，自力でできるかどうかは別問題であることをふまえると，分からなかったら答えをすぐに見てしまうという態度では中々こういった力は育っていかないと思います。