空間内に四面体 ABCD を考える。このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ。

＜ ’11 京都大 ＞

【戦略 1】

平面であれば，
三角形 ABC に対して，3 つの頂点 A，B，C を同時に通る円が存在するという主張になり，いわば外心の存在証明となります。

これを証明しようとすると，各辺の垂直二等分線の交点が 1 点で交わることを示せばよく，もっと言えば

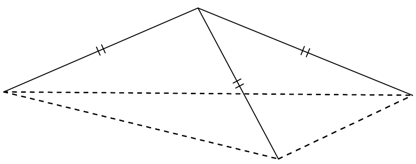
3 点 A，B，C から等距離である点 P を発見すればよい

ということになるでしょう。

本問はそれを 3 次元に拡張して考えます。

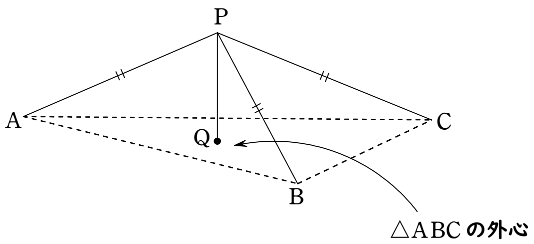
まずは，PA＝PB＝PC となる点 P を発見しにいきます。

これについては私が「三脚錐(すい)」と呼んでいる



という図形に注目します。（カメラの三脚のような四面体）

三脚錐では底面に下ろした垂線の足が，底面の外心になっているという性質があります。



△ABC の外心を Q とします。

題意の外心が存在するとしたら上の図でいう直線 PQ 上にあることが分かります。

つまり，PA＝PB＝PC となるように仕組むことについては解決です。

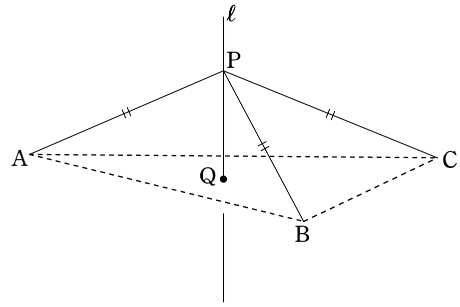
あとは，PA＝PD となるように仕組めれば，つまり A，D から等距離であるような点 P を見出せればよいことになります。

これについては線分 AD の「垂直二等分面」を考えればよいでしょう。

あとは三脚錐の軸と，この垂直二等分面がきちんと交点をもつことを示せばよいのですが，それについては絵をかいてみると，交点をもたない場合は四面体が潰れてしまうことから，記述としては背理法でまとめればよいでしょう。

【解 1】

△ABC の外心 Q を通り，平面ABC に垂直な直線を ℓ とする。

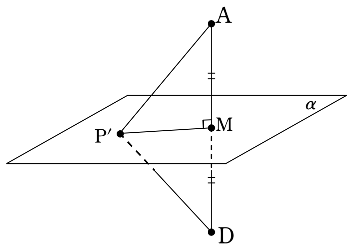


Q は △ABC の外心なので，QA＝QB＝QC

ゆえに，ℓ 上の任意の点 P に対して，直角三角形 PQA，PQB，PQC は合同となる。

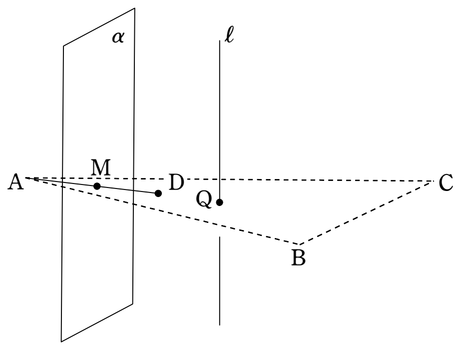
これより，ℓ 上の任意の点 P に対して，PA＝PB＝PC が成立する。

また，線分 AD に垂直な平面で，線分 AD の中点 M を通る平面を α とする。



α 上の任意の点 P′ について P′A＝P′D

α と ℓ が平行だと仮定すると，線分 AD が ℓ と垂直となる。



このとき，点 D が平面 ABC 上にあることになり，A，B，C，D が四面体をなさず，不合理。

ゆえに，α と ℓ は平行ではなく，α と ℓ は交点をもつ。

この交点を P_0 とすると，P_0 は ℓ 上より $P_0A=P_0B=P_0C$ を満たす。

一方，P_0 は α 上の点より，$P_0D=P_0A$ を満たす。

すなわち，$P_0A=P_0B=P_0C=P_0D$ を満たす。(この値を r とする。)

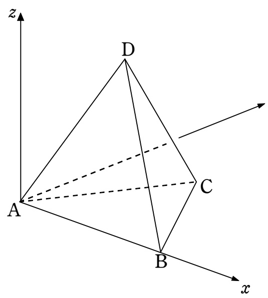
ゆえに，4 点 A，B，C，D は点 P_0 を中心とする半径 r の球面上にある。

【戦略 2】

座標を設定し，PA＝PB＝PC＝PD となる P を探しにいきます。

出来る限り楽をするように設定することを考えますが，一般の四面体なので簡単にするにも限界があります。

そこで



というように，A$(0,0,0)$，B$(a,0,0)$，C$(b,c,0)$，D(d,e,f) と設定してやります。

P(X,Y,Z) **と設定し，**$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2$ **を計算してやると，**

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=X^2+Y^2+Z^2 & \cdots ① \\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=(a-X)^2+Y^2+Z^2 & \cdots ② \\ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=(b-X)^2+(c-Y)^2+Z^2 & \cdots ③ \\ |\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=(d-X)^2+(e-Y)^2+(f-Z)^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

となります。

$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0$ **を計算して** X，Y，Z **について解いてみると**

$$X=\frac{a}{2},\ Y=\frac{b^2-ac+c^2}{2c},\ Z=\frac{d^2-ad+e^2-\dfrac{b^2e-abe+c^2e}{c}+f^2}{2f}$$

を得ることになります。

これは四面体 ABCD が与えられても，それに応じて定まる X，Y，Z **を用いて** P(X,Y,Z) **と定めれば PA＝PB＝PC＝PD となることを意味します。**

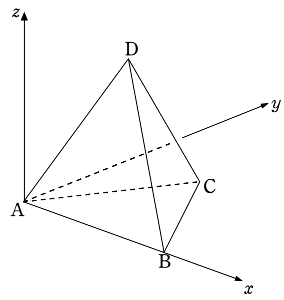
もちろんこれは，四面体 ABCD に対して，PA＝PB＝PC＝PD となる点 P が存在することを意味することになり，題意は示されます。

解答ではあたかも

四面体 ABCD に対して，こうやって P を定めればよい

という「天下り方式」で記述しておきます。

【解 2】



$a\neq 0$，$c\neq 0$，$f\neq 0$ として

A$(0,0,0)$，B$(a,0,0)$，C$(b,c,0)$，D(d,e,f)

と設定しても一般性を失わない。

このとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b^2-ac+c^2}{2c},\ \frac{d^2-ad+e^2-\dfrac{b^2e-abe+c^2e}{c}+f^2}{2f}\right)$$

と定める。

今，

$$\frac{a}{2}=X,\ \frac{b^2-ac+c^2}{2c}=Y,\ Z=\frac{d^2-ad+e^2-\dfrac{b^2e-abe+c^2e}{c}+f^2}{2f}$$

とおくと，

$$\begin{cases} 2X=a & \cdots (ア) \\ 2cY=b^2-ac+c^2 & \cdots (イ) \\ 2fZ=d^2-ad+e^2-\dfrac{b^2e-abe+c^2e}{c}+f^2 & \cdots (ウ) \end{cases}$$

このとき，P(X,Y,Z) とおきなおせる。

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=X^2+Y^2+Z^2 & \cdots ① \\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=(a-X)^2+Y^2+Z^2 & \cdots ② \\ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=(b-X)^2+(c-Y)^2+Z^2 & \cdots ③ \\ |\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=(d-X)^2+(e-Y)^2+(f-Z)^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

②－① より，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2&=a^2-2aX\\&=0\ (\because (ア))\end{aligned}$$

③－① より
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2&=b^2-2bX+c^2-2cY\\&=b^2-ab+c^2-(b^2-ab+c^2)\ (\because (ア),(イ))\\&=0\end{aligned}$$

④－① より
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2&=d^2-2dX+e^2-2eY+f^2-2fZ\\&=d^2-ad+e^2-\frac{e(b^2-ab+c^2)}{c}+f^2\\&\qquad-\left(d^2-ad+e^2-\frac{b^2e-abe+c^2e}{c}+f^2\right)(\because (ア),(イ),(ウ))\\&=0\end{aligned}$$

以上から，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$（$=r$ とする）

これは 4 点 A，B，C，D が P を中心とする半径 r の球面上にあることを意味し，題意は示された。

【総括】

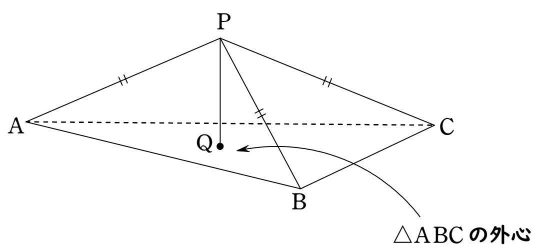
三角形 ABC に対して，3 つの頂点 A，B，C を同時に通る円が存在する

ということに対する拡張だと捉え，シナリオについてもその延長で処理できると判断できれば【解 1】のような幾何的な方針となるでしょう。

力づくでねじ伏せるとなれば【解 2】のような座標設定によりゴリゴリに計算主体で進めていく方針でしょうか。

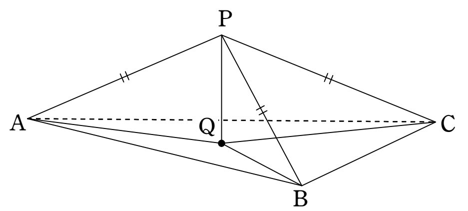
幾何的な方針は「見えるかどうか」に左右されます。
今回は２次元バージョンのシナリオがベースとなっていることを考えると多少思いつきやすい部分はあると思いますが，三脚錐のくだりなど山場はあるでしょう。

＜c f＞三脚錐



$PA=PB=PC$ を満たす四面体 PABC に対し，点 P から底面 ABC に下ろした垂線の足 Q は △ABC の外心となる。

(証明)



直角三角形 PQA，PQB，PQC について三平方の定理から

$$QA=\sqrt{PA^2-PQ^2}$$
$$QB=\sqrt{PB^2-PQ^2}$$
$$QC=\sqrt{PC^2-PQ^2}$$

条件 $PA=PB=PC$ より，$QA=QB=QC$ が成り立つ。

ゆえに，点 Q は △ABC の外心である。

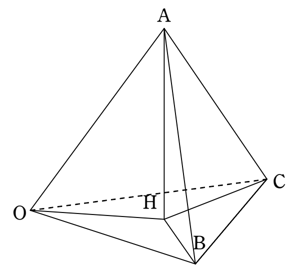
三脚錐というのは私が勝手に呼んでいるだけで全く市民権はありません。

【三脚錐についての参考類題】

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。
条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。
ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

＜ '16 京都大 ＞

【解答】



A から △OBC に下ろした垂線の足を H とすると，条件より H は △BCD の外心である。

ゆえに $HO=HB=HC$ ⋯ (∗)

三平方の定理から

$AO=\sqrt{HO^2+AH^2}$ ⋯ ①
$AB=\sqrt{HB^2+AH^2}$ ⋯ ②
$AC=\sqrt{HC^2+AH^2}$ ⋯ ③

H が O，B，C のいずれかと一致する場合でも ①，②，③ は成立する。

(∗)，及び ①，②，③ から $AO=AB=AC$ が成立する。

同様に B，C から対面におろした垂線の足を考え，上と同様にすれば

$$BO=BA=BC$$
$$CO=CA=CB$$

も得る。

以上から，$OA=OB=OC=AB=BC=CA$ が成立する。

これは四面体 OABC が正四面体であることを意味するため，題意は示された。