整数全体を定義域とする関数 $f(n)$ が

$$f(n)=\begin{cases} n-10 & (n \geqq 101 \text{ のとき}) \\ f\,(f\,(n+11)) & (n \leqq 100 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすとき，$f(n)=91$ $(n \leqq 100)$ が成立することを示せ。

＜ '97 新潟大 ＞

【戦略】

$f(1)$ **あたりで実験してみても**

$$f(1)=f(f(12))=f(f(f(23)))=\cdots\cdots$$

と，埒があきません。

f **が外れるのは** $n=100$ **近辺なので，**$f(100)$ **から実験してみます。**

$$f(100)=f(f(111))=f(101)=91$$
$$f(99)=f(f(110))=f(100)=91$$
$$f(98)=f(f(109))=f(99)=91$$

と帰納的に求まっていきます。

$f(k)=91$ **と仮定して，**$f(k-1)=91$ **を目指すという「下る方向」での帰納法を使っていきます。**

$f(k-1)=f(f(k+10))$ **なのですが，**$f(k+10)$ **の** f **が外れるためには**

$k+10 \geqq 101$**，すなわち** $k \geqq 91$ **である必要があるわけです。**

このことから，一旦

$f(100)=91$ **だから** $f(99)=91$

$f(99)=91$ **だから** $f(98)=91$

$f(98)=91$ **だから** $f(97)=91$

$\vdots$

$f(91)=91$ **だから** $f(90)=91$

という部分までは帰納法が完成することになります。

じゃあ残る $f(89)=91$，$f(88)=91$，$\cdots\cdots$ **の証明は？ということになりますが，もう一度実験をしてみると**

$$f(89)=f(f(100))=f(91)=91$$
$$f(88)=f(f(99))=f(91)=91$$
$$f(87)=f(f(98))=f(91)=91$$
$$\vdots$$

とさっきと構造が違うことが分かります。
（今度は全部 $f(91)$ **に帰着しています。）**

そこで再び帰納法を考えていきます。

今度は $f(89)=91$，$f(88)=91$，$\cdots\cdots$，$f(k)=91$ **と仮定すると**

$f(k-1)=f\left(\boxed{f(k+10)}\right)$ **なのですが**　$f(k) \sim f(99)$ **の中に** $f(k+10)$ **がいるはずです。**

$$f(99)=91,\ f(98)=91,\ \cdots\cdots,\ f(k)=91$$

よって，$f(k-1)=f(91)=91$ **となり解決です。**

【解答】

まず，$f(100)=f(99)=f(98)=\cdots=f(90)=91$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=100$ のとき

$$\begin{aligned} f(100)&=f\,(f\,(111)) \\ &=f\,(101)\ (\because\ f(111)=101\ ) \\ &=91 \end{aligned}$$

となり，成立する。

(ii)　$n=k$ $(k=100,\ 99,\ \cdots\cdots,\ 91)$ のとき

$f(k)=91$ と仮定する。

f が外れるためには $k+10 \geqq 101$
すなわち $k \geqq 91$
である必要があります。

$$\begin{aligned} f(k-1)&=f\,(f(k+10)) \\ &=f(k)\ (\because\ k=100,\ 99,\ \cdots,\ 91 \text{ なので，} k+10 \geqq 101\ ) \\ &=91 \end{aligned}$$

となり，$n=k-1$ のときも成立する。

(i)，(ii) より，

$$f(100)=91,\ f(99)=91,\ \cdots\cdots,\ f(91)=91,\ f(90)=91\ \cdots(☆)$$

である。

次は $f(89)=91$，$f(88)=91$，$\cdots\cdots$ であることを数学的帰納法で示す。

(Ⅰ)　$n=89$ のとき

$$\begin{aligned} f(89)&=f(f(100)) \\ &=f(91)\ (\because\ (☆)\,) \\ &=91 \end{aligned}$$

(Ⅱ)　$n=89,\ 88,\ 87,\ \cdots\cdots,\ k$ の全ての n で $f(n)=91$ と仮定する。

すなわち

$f(89)=91$，$f(88)=91$，$f(87)=91$，$\cdots\cdots$，$f(k)=91$ $\cdots$(★)

と仮定する

$f(k-1)=f\,(f(k+10))$ $\cdots$①

ここで，$k \leqq 89$ なので，$k+10 \leqq 99$

一方，$k \leqq k+10$ であるため，$k \leqq k+10 \leqq 99$

これより，$f(k+10)$ は $f(k) \sim f(99)$ の中にいる。

(☆)，(★) より，$f(k+10)=91$

ゆえに，① から，$f(k-1)=f(91)$

再び (☆) より，$f(91)=91$ であるから，$f(k-1)=91$ が成立し，$n=k-1$ のときも成立する。

以上から，$n \leqq 100$ なる整数 n に対して $f(n)=91$ が成立する。

【総括】

恐らく多くの人にとっては初体験であったのではないかと思います。

下るタイプの帰納法についても中々類題が少なく，自信をもって進めていくことが難しかった部分もあったでしょう。

帰納法を使う中で，一旦区切る必要がある部分も山場ですし，前半の帰納法と後半の帰納法で前段仮定の使い方が異なってくる点も実験から見出す必要があり，クリアーすべき手数が多いですね。

証明問題で結論が分かっているとはいえ，難問でしょう。

もし「$f(1)$ を求めよ」という問題であれば，結論を自分で見出すということまでしなければならず，さらにエネルギーが必要でしょうね。