反転変換

【類題】

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1)　点 Q の座標を a，b を用いて表せ。
(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

＜ '01 北海道大 ＞

【略解】

(1)　例題 ('07 名古屋大) と同じなので，省略。 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\,,\,\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(2)　この P，Q は $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ を満たすので (証明法は例題同様)

点 $\mathrm{Q}(X\,,\,Y)$ としたとき， $\begin{cases} a=\dfrac{X}{X^2+Y^2} \\ b=\dfrac{Y}{X^2+Y^2} \end{cases}$ を満たす

点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ が $(x-3)^2+y^2=1$ 上を動くとき $(a-3)^2+b^2=1$ を満たすので，

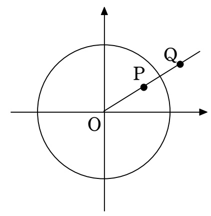
$\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}-3\right)^2+\left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1$ で，

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2-\frac{6X}{X^2+Y^2}+8=0$$

$\dfrac{1}{X^2+Y^2}-\dfrac{6X}{X^2+Y^2}+8=0$ で，整理すれば $\left(X-\dfrac{3}{8}\right)^2+Y^2=\dfrac{1}{64}$

求める軌跡は，円 $\left(x-\dfrac{3}{8}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{64}$

【類題 2】



座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。O を始点とする半直線上の二点 P，Q について，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ が成立するとき，P，Q は C に関して対称であるという。
(右の図では，P は C の内側にとってある)

(1)　点 $\mathrm{P}(x\,,\,y)$ の C に関して対称な点 Q の座標を x，y を用いて表せ。
(2)　点 $\mathrm{P}(x\,,\,y)$ が原点を除いた曲線

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13\,,\ (x\,,\,y)\neq(0\,,\,0)$$

上を動くとき，Q の軌跡を求めよ。

＜ '10 横浜市立大 ＞

【略解】

(1)　$\mathrm{Q}(X\,,\,Y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(k>0)$ とおく。

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=k\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の両辺に $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ をかけると $4=k\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ (∵ 条件)

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\dfrac{4}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より，Q の座標は $\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{4y}{x^2+y^2}\right)$ … 答

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ で両辺に $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ をかけると

条件より，$4=\dfrac{1}{k}\,|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}^2|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

これより，$\begin{cases} x=\dfrac{4X}{X^2+Y^2} \\ y=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2} \end{cases}$ を得て，この点 $\mathrm{P}(x\,,\,y)$ が

$(x-2)^2+(y-3)^2=13\,,\ (x\,,\,y)\neq(0\,,\,0)$ 上を動くので

$$\left(\frac{4X}{X^2+Y^2}-2\right)^2+\left(\frac{4Y}{X^2+Y^2}-3\right)^2=13\,,\ (X\,,\,Y)\neq(0\,,\,0)$$

これを展開すると

$$\frac{16X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{16Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{16X}{X^2+Y^2}-\frac{24Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$\frac{16}{X^2+Y^2}-\frac{16X}{X^2+Y^2}-\frac{24Y}{X^2+Y^2}=0$$

$2-2X-3Y=0$ ($(X\,,\,Y)=(0\,,\,0)$ はこれを満たさない)

ゆえに，求める点 Q の軌跡は

直線 $2x+3y-2=0$ … 答

【類題 3】

xy 平面の原点を O とする。xy 平面上の O と異なる点 P に対し，直線 OP 上の点 Q を，次の条件 (a)，(b) を満たすようにとる。

(a)　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$

(b)　Q は O に関して P と同じ側にある

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P が直線 $x=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　$a>r>0$ とする。点 P が円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ の上を動くとき，点 Q の軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

＜ '09 大阪市立大 ＞

【略解】

(1)　$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (k>0)$ とおく。

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\fallingdotseq 0$ より，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ はともに原点と一致することはない。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ より，両辺に $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ をかけると条件から $4=k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

ゆえに，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$\begin{cases} x=\dfrac{4X}{X^2+Y^2} \\ y=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2} \end{cases}$ $\cdots(*)$ という関係式を得る。

点 P が直線 $x=1$ 上を動くとき，$\dfrac{4X}{X^2+Y^2}=1$

これを整理すると $(X-2)^2+Y^2=4$

以上から，求める Q の軌跡は

円 $(x-2)^2+y^2=4$ の原点 $(0,\ 0)$ を除く部分 … 答

(2)　$(x,\ y)$ が $(x-a)^2+y^2=r^2$ 上を動くとき $(*)$ から

$$\left(\frac{4X}{X^2+Y^2}-a\right)^2+\left(\frac{4Y}{X^2+Y^2}\right)^2=r^2$$

を満たす。

$$\frac{16X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{16Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{8aX}{X^2+Y^2}+a^2-r^2=0$$

$$\frac{16}{X^2+Y^2}-\frac{8aX}{X^2+Y^2}+a^2-r^2=0$$

$$(a^2-r^2)(X^2+Y^2)-8aX+16=0$$

条件より $a>r>0$ であるため，$a^2-r^2>0$ なので

$$X^2+Y^2-\frac{8a}{a^2-r^2}X+\frac{16}{a^2-r^2}=0$$

$$\left(X-\frac{4a}{a^2-r^2}\right)^2+Y^2=\frac{16r^2}{(a^2-r^2)^2}$$

よって，点 Q の軌跡は円であり，

中心の座標は $\left(\dfrac{4a}{a^2-r^2},\ 0\right)$，半径は $\dfrac{4r}{a^2-r^2}$ … 答