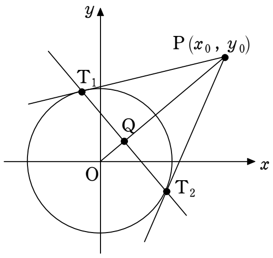
原点 O (0, 0) を中心とする半径 1 の円に，円外の点 P $(x_0,\ y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1)　2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を，点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ。また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であることを示せ。

(2)　点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

＜ '07 名古屋大 ＞

【戦略】



図のように接点 T_1，T_2 とします。

まずは，O，Q，P が O を端点とする半直線上に存在するということを見抜かないといけません。

これについては，2 枚の二等辺三角形 $\triangle \mathrm{PT_1T_2}$，$\triangle \mathrm{OT_1T_2}$ を線分 $\mathrm{T_1T_2}$ を共有するように張り付けていると考えればよいでしょう。

これにより $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ と表すことができるため，あとは倍率 k を求めることになります。

少し天下り的になりますが，大抵この手の問題（円の反転）の多くは $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=$★ のように長さの積情報が与えられていて，そこから倍率 k を表しにいくことが多いです。

そこで，まずは証明すべき $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ を先に示してしまうのがよいでしょう。

これについては，$\triangle \mathrm{OQT_1} \backsim \triangle \mathrm{OT_1P}$ であり，$\dfrac{\mathrm{OT_1}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OT_1}}$ ということから $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OT_1}^2=1$ となり解決です。

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ が得られればこっちのもので，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ なのですから $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ を活かして k を求めにいけばよいことになります。

(2) については Q $(x_1,\ y_1)$ の軌跡が欲しいわけです。

この x_1，y_1 はフリーダムに動けるわけではなく，何か動きを縛る関係式があるはずです。

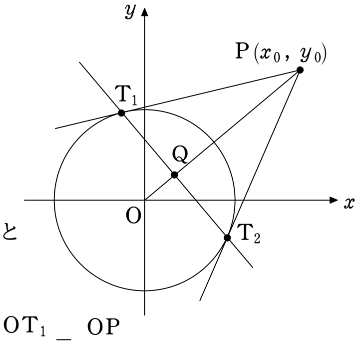
それを求めにいくのが軌跡の考え方の基本でしょう。

$\begin{cases} x_1=(x_0,\ y_0\text{ の式}) \\ y_1=(x_0,\ y_0\text{ の式}) \end{cases}$ **から，** $\begin{cases} x_0=(x_1,\ y_1\text{ の式}) \\ y_0=(x_1,\ y_1\text{ の式}) \end{cases}$ **に直して**

$x_0+y_0=2$ にぶち込めば，x_1，y_1 を縛っている関係式を Get できます。

(1) では $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と見ることで x_1，y_1 を得たのですから，x_0，y_0 を得たければ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と見ることで解決しそうです。

【解 1】



(1)　$\mathrm{PT_1}=\mathrm{PT_2}$ であり，$\triangle \mathrm{PT_1T_2}$，$\triangle \mathrm{OT_1T_2}$ は線分 $\mathrm{T_1T_2}$ を共有する二等辺三角形である。

ゆえに，O，Q，P は O を端点とする半直線上に存在する。

$\triangle \mathrm{OQT_1} \backsim \triangle \mathrm{OT_1P}$ であり，$\dfrac{\mathrm{OT_1}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OT_1}}$

これより，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OT_1}^2=1$ となり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ が成立する。

今，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ とおけ，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ である。

両辺に $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ をかけると $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ なので，$1=k|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$，すなわち $k=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}$ …①

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を得るため

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{{x_0}^2+{y_0}^2}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$

以上から Q$\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$ …答

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，① から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

よって $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{{x_1}^2+{y_1}^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ であり，

$$x_0=\frac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2},\ y_0=\frac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}$$

$(x_0,\ y_0)\fallingdotseq(0,\ 0)$ なので，$(x_1,\ y_1)\fallingdotseq(0,\ 0)$

今，$x_0+y_0=2$ を満たしているので

$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$ で，これを整理すると

${x_1}^2+{y_1}^2=\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{y_1}{2}$，すなわち $\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

ゆえに，求める点 Q の軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ のうち 原点を除いた部分 …答

【戦略 2】

2 つの接点を $\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ としたとき，直線 $\mathrm{T_1T_2}$ の式は見る人が見たら

$$x_0x+y_0y=1$$

とすぐに分かります。

円外の点から 2 本の接線を引いたとき，2 接点を通る直線は「極線」と呼ばれ，有名な直線です。($\boxed{\text{補足}}$ 参照)

この「極線」と円の方程式を連立すれば，交点の x 座標や y 座標のもととなる 2 次方程式に辿り着きますから，解と係数の関係から s_1+s_2，t_1+t_2 などが得られます。

これは線分 $\mathrm{T_1T_2}$ の中点 Q を得るためには十分な情報で，これにより $x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$ を得ることになります。

その反面，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ をどのように得るかなのですが，

$x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$ から ${x_0}^2+{y_0}^2=\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{y_0}{y_1}$ という関係式が得られますから，

「比例式は $=k$ とおけ」

というセオリーがあれば手なりに話が進んでいきます。

(2) については基本方針は【戦略 1】と同じように

$\begin{cases} x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \\ y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \end{cases}$ から，$\begin{cases} x_0=(x_1,\ y_1 \text{ の式}) \\ y_0=(x_1,\ y_1 \text{ の式}) \end{cases}$ に直して

$x_0+y_0=2$ にぶち込むことを狙っていきます。

ベクトルという【解 1】では x_0，y_0 主体で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ と見るか，x_1，y_1 主体で $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$ と見るかは自由自在だったのですが，その方針が見えないとなると少々苦しいでしょう。

ここで，考えてもらいたいのは

O，Q，P は O を端点とする半直線上にあり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ を満たす

という条件によって定まる 2 点です。

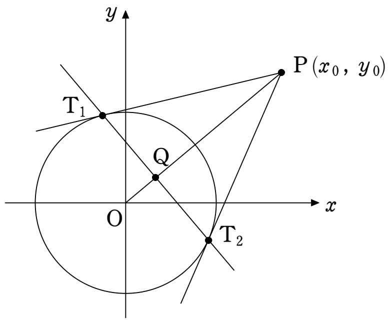
つまり，

P を与えたときに得られる Q の座標の形
と
Q を与えたときに得られる P の座標の形

は対称性から同じ形になるに決まっています。つまり

$\begin{cases} x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \\ y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \end{cases}$ となっているのであれば，$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2} \\ y_0=\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2} \end{cases}$ となっているに決まっています。

【解 2】



(1) 2 つの接点を
$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$
とする。

このとき，T_1 における円の接線は

$$s_1x+t_1y=1$$

これが $(x_0,\ y_0)$ を通るので

$$s_1x_0+t_1y_0=1$$

同様に，$s_2x_0+t_1y_0=1$

この結果は，$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ が直線 $x_0x+y_0y=1$ 上にあるということを意味し，それはすなわち，直線 $\mathrm{T_1T_2}$ (ℓ と呼ぶ) の方程式が

$$\ell:\ x_0x+y_0y=1$$

であることを意味する。

$x_0\fallingdotseq 0$，$y_0\fallingdotseq 0$ のとき

ℓ の式と，円 $x^2+y^2=1$ を連立して y を消去すると

$$x^2+\left\{\frac{1}{y_0}(1-x_0x)\right\}^2=1$$

これを整理すると，$({x_0}^2+{y_0}^2)x^2-2x_0x+1-{y_0}^2=0$

これの解が s_1，s_2 なので，解と係数の関係から $s_1+s_2=\dfrac{2x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$

一方で，ℓ の式と，円 $x^2+y^2=1$ を連立して x を消去すると

$$y^2+\left\{\frac{1}{x_0}(1-y_0y)\right\}^2=1$$

これを整理すると，$({x_0}^2+{y_0}^2)y^2-2y_0y+1-{x_0}^2=0$

これの解が t_1，t_2 なので，解と係数の関係から $t_1+t_2=\dfrac{2y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$

$x_1=\dfrac{s_1+s_2}{2}$，$y_1=\dfrac{t_1+t_2}{2}$ であるため，

$$x_1=\frac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ y_1=\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\ \cdots(☆)$$

$y_0=0$ のとき，P は円の外部の点であることから $x_0\fallingdotseq 0$ であり，

$$\ell:\ x=\frac{1}{x_0}$$

このとき，Q は x 軸上にあるため，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{x_0},\ 0\right)$ となり (☆) は $y_0=0$ のときでも成り立つ。

$x_0=0$ のとき，P は円の外部の点であることから $y_0\fallingdotseq 0$ であり，

$$\ell:\ y=\frac{1}{y_0}$$

このとき，Q は y 軸上にあるため，$Q\left(0,\ \dfrac{1}{y_0}\right)$ となり (☆) は $x_0=0$ のときでも成り立つ。

以上から $Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$ …答

また，(☆) より

$$ {x_0}^2+{y_0}^2=\frac{x_0}{x_1}=\frac{y_0}{y_1}\ (\ =k \text{ とおく}) $$

$x_0=kx_1$，$y_0=ky_1$ であり，${x_0}^2+{y_0}^2=k$ なので

$$ k^2({x_1}^2+{y_1}^2)=k $$

$k=0$ とすると，x_0，y_0 がともに 0 ということになり，$P(x_0,\ y_0)$ が円 $x^2+y^2=1$ の外部の点であることに反する。

ゆえに，$k\neq0$ で，${x_1}^2+{y_1}^2=\dfrac{1}{k}$

$OP=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}=\sqrt{k}$，$OQ=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{\dfrac{1}{k}}$ なので

$$ OP\cdot OQ=1 $$

が成立する。

(2) x_0，y_0 が $x_0+y_0=2$ を満たしているときに

$\begin{cases} x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \\ y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2} \end{cases}$ で与えられる点 $Q(x_1,\ y_1)$ の軌跡を求めればよい。

${x_1}^2+{y_1}^2=0$ だとすると，$OQ=0$ ということになり，(1) で示した $OP\cdot OQ=1$ に反する。

したがって，${x_1}^2+{y_1}^2\neq0$ であり，Q は原点とはならない。

x_0，y_0 と x_1，y_1 については

$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2} \\ y_0=\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2} \end{cases}$ も満たしているので，$x_0+y_0=2$ に代入して

$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$ で，これを整理すると

${x_1}^2+{y_1}^2=\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{y_1}{2}$，すなわち $\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

ゆえに，求める点 Q の軌跡は

$$ \text{円 } \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8} \text{ のうち 原点を除いた部分 …答} $$

【総括】

反転と呼ばれるテーマ性のある話題です。

中心を O，半径 r の円に対して，2 点 P，Q を次のように定める。

- P，Q は O を端点とする半直線上にある。
- $OP\cdot OQ=r^2$

特に，P を定めて，それに応じて点 Q が決まると見たときに，この P → Q という変換を「反転変換」と言います。

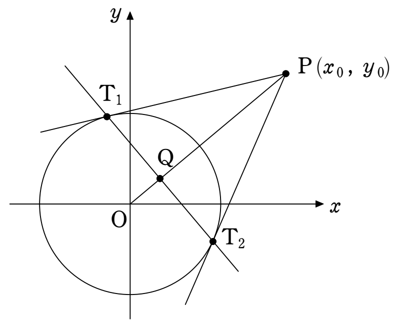
特に P の軌跡が直線と円のとき，反転写像 Q の軌跡も直線または円となり

原点を通る直線は，原点を通る直線 (原点は除く) に移る
原点を通らない直線は，原点を通る円 (原点は除く) に移る
原点を通る円は，原点を通らない直線に移る
原点を通らない円は，原点を通らない円に移る

ことが言えます。（本問は上から 2 つめの場合ですね。）

入試においてもこの話題は結構出題されるため，しっかり準備しておくと安心です。

補足 極線



円外の点 $P(x_0,\ y_0)$ から円に引いた 2 本の接線の接点を T_1，T_2 とします。

このとき，直線 T_1T_2 をこの円の極線と言い，P を極と言います。

円の方程式が $x^2+y^2=r^2$ のとき $P(x_0,\ y_0)$ を極とする極線の方程式は

$$ x_0x+y_0y=r^2 $$

で与えられます。

接線を作る要領で作れます。
そのせいで逆に接線を作ろうとして意図せず極線を作っている初学者が多く，指導者泣かせな項目です。

（証明）

$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$ とすると，T_1 における円の接線は

$$ s_1x+t_1y=r^2 $$

これが $(x_0,\ y_0)$ を通るので $s_1x_0+t_1y_0=r^2$

同様に，$s_2x_0+t_2y_0=r^2$

こっちの流れは普段からよく使う脳みその使い方で分かりやすいですが

こっちの流れはクセがありますね。

この結果は，$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$ が直線 $x_0x+y_0y=r^2$ 上にあるということを意味し，それはすなわち，直線 T_1T_2 の方程式が

$x_0x+y_0y=r^2$ であることを意味する。