$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a \neq 0)$ とする。
曲線 $y=f(x)$ は円 $x^2+y^2=1$ と 4 点のみを共有し，これらの 4 点はある正方形の頂点になっている。$f(x)$ を求めよ。

＜ '91 東北大 ＞

【戦略】

最終的に条件を翻訳して立式すると，次数が高い連立方程式となり，
$\pm$ などうっとうしいことになります。

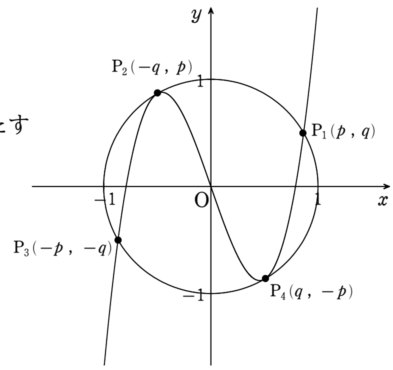
対称性の活用により無駄を省く工夫をしましょう。

$a>0$ のときのものが見つかれば，y 軸について裏返すことにより $a<0$ のものも見つかるわけですから，結局は $a>0$ のときのみの労力で事足りることになります。

【解答】

対称性から
$a>0$ のときの題意を満たす
$f(x)$ と $a<0$ のときの題意を満たす
$f(x)$ は y 軸について対称である。

したがってまず $a>0$ のときを
考えることにする。



正方形の 4 頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4 として，
$P_1(p,\ q)$（$p>0$，$q>0$）として一般性を失わない。
注意 $p=0$，または $q=0$ のときは明らかに題意を満たさない。

このとき，$P_2(-q,\ p)$，$P_3(-p,\ -q)$，$P_4(q,\ -p)$ と表せる。

$y=f(x)$ が P_1，P_3 を通るので

$$q=ap^3+bp^2+cp+d$$
$$-q=-ap^3+bp^2-cp+d$$

辺々加えて整理すると $bp^2+d=0$ …①

一方 $y=f(x)$ が P_2，P_4 を通るので

$$p=-aq^3+bq^2-cq+d$$
$$-p=aq^3+bq^2+cq+d$$

辺々加えて整理すると $bq^2+d=0$ …②

①−② より $b(p+q)(p-q)=0$

$p>0$，$q>0$ ゆえ $b(p-q)=0$

$p=q$ のときは P_1P_2 が x 軸と平行となり題意を満たさないので，$b=0$

①より $d=0$ も得て，$f(x)=ax^3+cx$

奇関数であるのは最初から見えている人には見えているでしょう。

$a>0$ より，P_1 が交点で，P_4 が接点である。

（P_4 での接線）$/\!/$ OP_1 より，$f'(q)=\dfrac{q}{p}$ で $3aq^2+c=\dfrac{q}{p}$

すなわち，$3apq^2+cp=q$

３次曲線と円が接することの翻訳

(p,q)，$(q,-p)$ が $y=f(x)$，$x^2+y^2=1$ 上にあることもふまえてまとめると

$$\begin{cases} ap^3+cp=q & \cdots ③ \\ aq^3+cp=-p & \cdots ④ \\ p^2+q^2=1 & \cdots ⑤ \\ 3apq^2+cp=q & \cdots ⑥ \end{cases}$$

ここでも対称性を用います。
$f(x)$ が奇関数だと分かったのですから
右半分（$x \geqq 0$）の P_1，P_4 が
$y=f(x)$ 上，かつ $x^2+y^2=1$ 上
という条件で十分ですね。

⑥－③ より $3apq^2=ap^3$

$a>0$，$p>0$ より，$3q^2=p^2$

これと ⑤，および $p>0$，$q>0$ より，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$

③，④ に代入すると，$\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{8}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

これら 2 式より，$a=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$，$c=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

以上から，$a>0$ のとき題意を満たす $f(x)$ は $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{3}}x^3-\dfrac{5}{\sqrt{3}}x$

$a<0$ のときは，この $f(x)$ を y 軸について対称移動したものなので

$$f(x)=-\frac{8}{\sqrt{3}}x^3+\frac{5}{\sqrt{3}}x$$

以上から求める $f(x)$ は $f(x)=\pm\dfrac{8}{\sqrt{3}}x^3\mp\dfrac{5}{\sqrt{3}}x$（複号同順）… 答

【総括】

省エネできる部分は省エネしましょう。

一般性が高い設定で文字も多いですが，同時に対称性が高い設定でもあります。

その対称性を活かさなければ，文字の多さだけが残るという最悪の状態になってしまいます。