n を 0 以上の整数，e を自然対数の底として，

$$I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx$$

と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 を求めよ。

(2) 不等式 $\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}<e^e$ が成り立つことを証明せよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx$，$\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ **を求める具体的な積分計算です。**

I_1 **の方が** $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ **型なので目に付きやすく，すぐに片付くかもしれません。**

I_0 **は** $e^x=X$ **などと置換すれば部分分数分解の形が現れます。**

もしくは，$I_1=\displaystyle\int_0^1 1-\frac{1}{e^x+1}\,dx=1-I_0$ **と見れば，逆算的に求めることもできます。**

(2) $I_1=\log\dfrac{e+1}{2}$，$I_0=\log\dfrac{2e}{e+1}$ **という** (1) **の結果の中に** $\dfrac{e+1}{2}$ **がいます。**

求めたい不等式を逆算的に見ます。

$\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}<e^e$ **から，**$\dfrac{e+1}{2}$ **が登場するような変形を考え**

両辺に $\left(\dfrac{2}{e+1}\right)^e$ **をかけると** $\dfrac{e+1}{2}<e^e\cdot\left(\dfrac{2}{e+1}\right)^e$ $\left(=\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)^e\right)$

両辺自然対数をとると $\log\dfrac{e+1}{2}<e\log\dfrac{2e}{e+1}$ **ですから**

$I_1<eI_0$ **が証明されれば，題意の不等式が証明されることになります。**

つまり，$\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx<\int_0^1\frac{e}{e^x+1}\,dx$ **が言えれば解決です。**

そしてそれは「体の一部を定数化」という定積分と不等式の分野における基本的態度ですぐさま言えることになります。

積分区間は文字の変域であることを存分に利用しましょう。

【解答】

(1) $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx$

$e^x=X$ とおくと，

x	$0\ \to\ 1$
X	$1\ \to\ e$

$e^x\,dx=dX$，すなわち $dx=\dfrac{1}{X}\,dX$

よって，

$$\begin{aligned}I_0&=\int_1^e\frac{1}{X+1}\cdot\frac{1}{X}\,dX\\&=\int_1^e\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}\right)dX\\&=\Big[\log X-\log(X+1)\Big]_1^e\\&=\{\,1-\log(e+1)\,\}-\{\,0-\log 2\,\}\\&=1+\log 2-\log(e+1)\\&=\log\frac{2e}{e+1}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx\\&=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1\\&=\log(e+1)-\log 2\\&=\log\frac{e+1}{2}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) $eI_0=\displaystyle\int_0^1\frac{e}{e^x+1}\,dx$

ここで，積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$e\geqq e^x$ より，$\dfrac{e}{e^x+1}\geqq\dfrac{e^x}{e^x+1}$

等号は常に成立しないので，$\displaystyle\int_0^1\frac{e}{e^x+1}\,dx>\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

すなわち，$eI_0>I_1$

(1) より，$e\log\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)>\log\dfrac{e+1}{2}$，すなわち $\log\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)^e>\log\dfrac{e+1}{2}$ が成立する。

ゆえに，$\dfrac{e+1}{2}<\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)^e$ が成立する。

両辺に $\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^e$ をかけると，$\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}<e^e$ となり，題意は示された。

【総括】

(1) は基本的な積分計算であり，実戦の現場であれば確保したいレベルでしょう。

(2) は (1) の結果をどう結び付けるかという「観察力」と「活用力」が問われます。

一般においては $n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx}\cdot e^x}{e^x+1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x+1)-e^{nx}}{e^x+1}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{nx}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 - I_n \\ &= \frac{e^n-1}{n} - I_n \end{aligned}$$

ここで $n \geqq 1$ である必要が出てきます

という漸化式が成立し，これを変形すると，$I_{n+1}+I_n=\dfrac{e^n-1}{n}$ です。

積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において，$1 \leqq e^x \leqq e$ が成立することから，

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leqq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leqq \frac{e^{nx}}{1+1}\ \left(=\frac{e^{nx}}{2}\right)$$

等号は常に成立しないので，

$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1}\,dx < I_n < \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^1 e^{nx}\,dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n-1}{n}$ なので，

$$\frac{1}{e+1}\cdot\frac{e^n-1}{n} < I_n < \frac{1}{2}\cdot\frac{e^n-1}{n}$$

となり

$$\frac{1}{e+1}(I_{n+1}+I_n) < I_n < \frac{1}{2}(I_{n+1}+I_n)$$

が成立し，左側の不等式から，$I_{n+1}<eI_n$ が得られ，右側の不等式から $I_n<I_{n+1}$ が得られます。

まとめると，$I_n<I_{n+1}<eI_n$ という不等式が得られ，これが一般論での評価となります。

注意：$I_{n+1}+I_n=\dfrac{e^n-1}{n}$ は $n \geqq 1$ でしか成り立ちませんが，

$I_n<I_{n+1}<eI_n$ は $n=0$ のときを個別で調べれば成立し

結果的に，$I_n<I_{n+1}<eI_n$ は $n \geqq 0$ で成立します。

最初はこの一般論の評価を問題にしようとも思いましたが，敢えて具体的な数値評価の方が見た目のインパクト的に怯む受験生も多いかなと思ったので，今回のように出題しました。

ちなみに $2<e<3$ とラフな評価で考えてみます。

e はどちらかというと 3 寄りの値なので，誤差的には $e<3$ を用いた方が良さそうです。

そこを踏まえて，$\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}$ を大きくするような方向で評価をしてみます。

すると $\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}<\left(\dfrac{3+1}{2}\right)^4$，すなわち $\left(\dfrac{e+1}{2}\right)^{e+1}<16$ となります。

$16<e^e$ が言えれば，題意が示せるわけですが，残念ながら実際には $e^e<16$ となります。

これについては，1992 年度に北海道大学が e^e に最も近い整数である 15 を求めさせる出題をしており，

『テーマ別演習：数値評価第４講「e^e の評価」』

でも取り扱っています。

そちらも本問とは別の話題ですが，勉強になると思うのでよろしければ，ぜひ参考にしてみてください。

また，定積分と不等式についても『テーマ別演習：定積分と不等式』で一連の考え方などを解説・紹介していますので，適宜ご活用ください。