A，Bの２人が交互にコインを投げ合うゲームを行う。

お互い５回投げ合った時点で表の出ている回数を得点として，得点が多い方を勝ちとする。ただし，A，B の一方がこれ以上やっても勝ち目がないと確定すれば，その時点でこのゲームは終了する。また，５回投げ合った時点で得点が双方とも同じ場合は，延長戦として A，B の投げたコインの表裏が異なるまで続け，１回目からそこまでの得点が多い方を勝ちとする。

A を先攻とするとき，次の問いに答えよ。

(1) B が４回目のコインを振ることなく，ゲームが終了する確率を求めよ。

(2) n を５以上の自然数とする。B が n 回目のコインを振って A が勝つ確率を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

システムが捉えづらく，いきなり一般論で考えることができないときこそ，まずは具体例で実験してみることが大切です。

ゲームが終了するというのは

(残り回数)＜(その時点での点差)

というのが急所です。

(2) は基本的には延長戦の話ですから，$n=5$ のときと $n\geqq6$ のときで場合分けをします。

まずは $n=5$ で題意を満たすときを考えますが，これは (1) で急所に気づいていれば問題ないでしょう。

次に，$n\geqq6$ のときですが，まずは延長戦に突入する確率を求めることに注力しましょう。

その後，$k-1$ 回決着がつかない (両者同じ結果が $k-1$ 回続く) 確率を考えて，k 回目に A が表，B が裏という確率を考えればよいことになります。

【解答】

(1) B が４回目のコインを振ることができずに A の勝ちで決着がつく場合，

コインを振る回数	1	2	3	4	5
A	○	○	○	／	／
B	×	×	×	／	／

と，

「 (i)　お互い３回投げた時点で３点差がついている」

または

コインを振る回数	1	2	3	4	5
A	○	○	○	○	／
B	○	×	×	／	／

など，

「 (ii)　A が４回投げた時点で３点差がついている」

(i) の確率　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{64}$

(ii) の確率

「お互い３回投げた時点で２点差」 かつ 「４回目の A が表」

となる確率である。

お互い３回投げたとき，(A の得点，B の得点)＝(3，1)，(2，0) となる確率は

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]+\left[\left\{{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=\frac{3}{32}$$

ゆえに，(ii) の確率は $\dfrac{3}{32}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{64}$

B が４回目のコインを振ることなく，B の勝ちで決着がつく場合

コインを振る回数	1	2	3	4	5
A	×	×	×	／	／
B	○	○	○	／	／

と，「 (iii)　お互い３回投げた時点で３点差がついている」

または

コインを振る回数	1	2	3	4	5
A	×	×	×	×	／
B	×	○	○	／	／

など，

「 (iv)　A が４回投げた時点で２点差がついている」

(iii) の確率　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{64}$

(iv) の確率

「お互いが 3 回投げた時点で 2 点差」かつ「4 回目の A が裏」

となる確率で (ii) のときと同様にして

$$\frac{3}{32}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{64}$$

以上から，求める確率は $\frac{1}{64}+\frac{3}{64}+\frac{1}{64}+\frac{3}{64}=\frac{1}{8}$ …答

(2)　A が 5 回目のコインを投げ終わった段階で 2 点差で A が勝っていたら，B は 5 回目のコインを振ることなく負けが確定してしまう。

ゆえに A が 5 回目のコイン投げが終わった段階で 2 人の得点差は

1 点差，または同点

のいずれかである。

(ア)　$n=5$ のとき

A が 5 回目のコイン投げを終えた時点で同点だと，5 回目の B の結果によって A の勝ちは確定しない。

ゆえに，A が 5 回目のコイン投げを終えた時点では 1 点差である。

（A の得点，B の得点）$=(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(1,0)$

こうなる確率は，

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\\&+\left[\left\{{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}\times\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\times\left\{{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2^9}+\frac{5\times4}{2^9}+\frac{10\times6}{2^9}+\frac{10\times4}{2^9}+\frac{5}{2^9}$$
$$=\frac{63}{256}$$

このとき，B の 5 回目のコイン投げの結果が裏となれば，A の勝ちが確定するので，

$$\frac{63}{256}\times\frac{1}{2}=\frac{63}{512}$$

(イ)　$n\geqq6$ のとき（延長戦で決着がつくとき）

(I)　A が 5 回目のコイン投げを終えた時点では 1 点差のとき

その確率は上の議論から $\frac{63}{256}$

このとき，5 回目のBのコイン投げの結果が表となると延長戦に突入する。その確率は $\frac{1}{2}$

(II)　A が 5 回目のコイン投げを終えた時点で同点の場合

（A の得点，B の得点）$=(4,4),(3,3),(2,2),(1,1),(0,0)$

$$\begin{aligned}&\left[\left\{{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\times\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]\\&+\left[\left\{{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\left\{{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\right]\\&+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{5}{2^9}+\frac{10\times4}{2^9}+\frac{10\times6}{2^9}+\frac{20}{2^9}+\frac{1}{2^9}$$
$$=\frac{63}{256}$$

このとき，5 回目のBのコイン投げの結果が裏となると，延長戦に突入する。その確率は $\frac{1}{2}$

以上 (I)，(II) から延長戦に突入する確率は

$$\frac{63}{256}\times\frac{1}{2}+\frac{63}{256}\times\frac{1}{2}=\frac{63}{256}$$

$k=1,2,\cdots$ として，$n=5+k$ 回目で決着がつく確率を求める。

延長戦開始から $k-1$ 回両者の結果が同じとなり，

k 回目で A が表，B が裏となればよく，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

よって，$\frac{63}{256}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\frac{63}{2^{k+9}}$

$=\frac{63}{2^{n+4}}$（∵ $n=5+k$ より $k=n-5$）

これは $n=5$ のときも成立する。

以上から求める確率は $\frac{63}{2^{n+4}}$ …答

【総括】

難関大では有名なゲームをモデルとした出題がしばしば出題されます。
本問はサッカーの PK 戦をモデルとして作成しました。

実際に取り組んでみると意外とやりにくい問題です。
似たような問題で「日本シリーズの問題」というものがあります。

日本シリーズの問題は「どちらかが○ならばもう一方は×」であるために一気に表が埋まっていくのに対して，本問のような PK 戦はそれぞれ 1 つずつ ○ と × が埋まっていくために，決着がつくための条件を捉えづらいことが難しさの根源です。