n を正の整数とする。1 から 6 のどの目も同様に確からしく出るさいころがあり，このさいころを n 回投げ，出た目を順に a_1，a_2，…，a_n とする。

これら n 個の目の数字の積 $x_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ について x_n が平方数となる確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，平方数とは整数の 2 乗の形で表わすことができる数である。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) は所詮 $6\times6=36$ 通りですから，直接数え上げてもたかが知れています。

問題は (2) で，平方数ということをどのように処理していくかが問題です。

最初に注目したいのは 1 と 4 という目です。

(平方数)×1＝(平方数)，(平方数)×4＝(平方数)
(非平方数)×1＝(非平方数)，(非平方数)×4＝(非平方数)

ですから 1，4 はいい意味でも悪い意味でも結果に影響を与えない目であることが言えるでしょう。

これを皮切りに「目を分類する」ことをしたいところです。

結局 $2^{偶数}3^{偶数}5^{偶数}$ となったら平方数であり，$2^{◎}3^{□}5^{▽}$ という形における指数部分の偶奇の選択肢が $2\cdot2\cdot2=8$ 通りあるので，それらをどのように推移していくかを丁寧に追っていきます。

8 通りのうち，

1，4 が出れば幸せなタイプ（天国）… $2^{偶数}3^{偶数}5^{偶数}$

2 が出れば幸せなタイプ … $2^{奇数}3^{偶数}5^{偶数}$

3 が出れば幸せなタイプ … $2^{偶数}3^{奇数}5^{偶数}$

5 が出れば幸せなタイプ … $2^{偶数}3^{偶数}5^{奇数}$

6 が出れば幸せなタイプ … $2^{奇数}3^{奇数}5^{偶数}$

（以上 4 つ）**あと一歩で幸せなタイプ**

何が出ても幸せになれないタイプ（地獄）… $2^{奇数}3^{偶数}5^{奇数}$　$2^{偶数}3^{奇数}5^{奇数}$
$2^{奇数}3^{奇数}5^{奇数}$

と分類して，整理していきます。

この「あと一歩で幸せなタイプ」にも２種類あり

5 が出ると地獄に落ちる $2^{奇数}3^{偶数}5^{偶数}$，$2^{偶数}3^{奇数}5^{偶数}$，$2^{奇数}3^{奇数}5^{偶数}$

2，3，6 が出ると地獄に落ちる $2^{偶数}3^{偶数}5^{奇数}$

という 2 タイプに分けられます。

【解答】

(1)　x_2 としてあり得る平方数は 1，4，9，16，25，36

$(a_1, a_2)=(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の 8 通りが題意を満たす目の組であるので，

$$p_2=\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}\ \cdots 答$$

(2)　サイコロの目 1 ～ 6 の中に現れる素因数は 2，3，5 のみなので，
$x_n=2^a3^b5^c$（a，b，c は非負整数）と表せる。

$2^{偶数}3^{偶数}5^{偶数}$ と表せる数の集合を P　天国（幸せな方々）

$2^{偶数}3^{偶数}5^{奇数}$ と表せる数の集合を Q　2，3，6 が出ると地獄

$\begin{cases}2^{偶数}3^{奇数}5^{偶数}\\2^{奇数}3^{偶数}5^{偶数}\\2^{奇数}3^{奇数}5^{偶数}\end{cases}$ と表せる数の集合を R　5 が出ると地獄

$\begin{cases}2^{偶数}3^{奇数}5^{奇数}\\2^{奇数}3^{偶数}5^{奇数}\\2^{奇数}3^{奇数}5^{奇数}\end{cases}$ と表せる数の集合を S　地獄（幸せになれない）

とする。

(i)　$x_n\in\mathrm{P}$ のとき
$a_{n+1}=1，4$ となれば，$x_{n+1}\in\mathrm{P}$
$a_{n+1}=5$ となれば，$x_{n+1}\in\mathrm{Q}$
$a_{n+1}=2，3，6$ となれば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$

したがって，$x_n\in\mathrm{P}$ の状態から $\begin{cases}x_{n+1}\in\mathrm{P}\ となる確率は\ \dfrac{1}{3}\\ x_{n+1}\in\mathrm{Q}\ となる確率は\ \dfrac{1}{6}\\ x_{n+1}\in\mathrm{R}\ となる確率は\ \dfrac{1}{2}\end{cases}$

(ii)　$x_n\in\mathrm{Q}$ のとき
$a_{n+1}=1$ または 4 となれば $x_{n+1}\in\mathrm{Q}$
$a_{n+1}=5$ となれば $x_{n+1}\in\mathrm{P}$
$a_{n+1}=2，3，6$ となれば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$

$x_n\in\mathrm{Q}$ の状態から $\begin{cases}x_{n+1}\in\mathrm{P}\ となる確率は\ \dfrac{1}{6}\\ x_{n+1}\in\mathrm{Q}\ となる確率は\ \dfrac{1}{3}\\ x_{n+1}\in\mathrm{S}\ となる確率は\ \dfrac{1}{2}\end{cases}$

(iii)　$x_n \in \mathrm{R}$ のとき

$x_n=2^{偶数}3^{奇数}5^{偶数}$　のときは

3 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{P}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$
1，2，4，6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$

$x_n=2^{奇数}3^{偶数}5^{偶数}$　のときは

2 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{P}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$
1，3，4，6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$

$x_n=2^{奇数}3^{奇数}5^{偶数}$　のときは

6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{P}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$
1，2，3，4 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$

$x_n\in\mathrm{R}$ の状態から $\begin{cases} x_{n+1}\in\mathrm{P}\text{ となる確率は }\dfrac{1}{6} \\ x_{n+1}\in\mathrm{R}\text{ となる確率は }\dfrac{2}{3} \\ x_{n+1}\in\mathrm{S}\text{ となる確率は }\dfrac{1}{6} \end{cases}$

(iv)　$x_n\in\mathrm{S}$ のとき

$x_n=2^{偶数}3^{奇数}5^{奇数}$　のときは

3 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{Q}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$
1，2，4，6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$

$x_n=2^{奇数}3^{偶数}5^{奇数}$　のときは

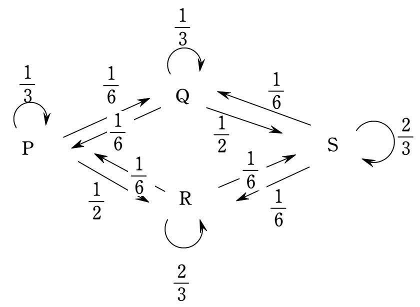
2 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{Q}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$
1，3，4，6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$

$x_n=2^{奇数}3^{奇数}5^{奇数}$　のときは

6 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{Q}$
5 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{R}$
1，2，3，4 が出れば $x_{n+1}\in\mathrm{S}$

$x_n\in\mathrm{S}$ の状態から $\begin{cases} x_{n+1}\in\mathrm{Q}\text{ となる確率は }\dfrac{1}{6} \\ x_{n+1}\in\mathrm{R}\text{ となる確率は }\dfrac{1}{6} \\ x_{n+1}\in\mathrm{S}\text{ となる確率は }\dfrac{2}{3} \end{cases}$

したがって状態推移図は以下のようになる



$x_n\in$ P，Q，R，S　となっている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n　とする。(求める p_n はまさしくこの p_n である)

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{6}r_n & \cdots ① \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{3}q_n+\dfrac{1}{6}s_n & \cdots ② \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{2}{3}r_n+\dfrac{1}{6}s_n & \cdots ③ \\ s_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{6}r_n+\dfrac{2}{3}s_n & \cdots ④ \end{cases}$$

$p_n+q_n+r_n+s_n=1$　を用いて，①，②，③　から s_n　を消去すると

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{6}r_n & \cdots ⑤ \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n-\dfrac{1}{6}r_n+\dfrac{1}{6} & \cdots ⑥ \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n-\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{6} & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑤+⑥　より　$p_{n+1}+q_{n+1}=\dfrac{1}{3}(p_n+q_n)+\dfrac{1}{6}$　　**r_n を消去**

$A_n=p_n+q_n$　とおくと，

$$A_{n+1}=\frac{1}{3}A_n+\frac{1}{6} \iff A_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(A_n-\frac{1}{4}\right)$$

$$A_n-\frac{1}{4}=\left(A_1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$A_1=p_1+q_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$　なので，$A_n-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

これより　$p_n+q_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　$\cdots ⑧$

⑤+⑦　より　$p_{n+1}+r_{n+1}=\dfrac{2}{3}(p_n+r_n)+\dfrac{1}{6}$　で上と同様に解くと

q_n を消去　　$p_n+r_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$\cdots ⑨$

ぶち込める！

⑥+⑦　より　$q_{n+1}+r_{n+1}=\dfrac{1}{3}(p_n+r_n)+\dfrac{1}{3}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right\}+\frac{1}{3}\quad(\because ⑨)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad\cdots ⑩$$

⑧＋⑨ より，$2p_n+(q_n+r_n)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

⑩ より，$q_n+r_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

（この式に $n=1$ を代入すると，$q_1+r_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$ だが，

$q_1=\frac{1}{6}$，$r_1=\frac{1}{2}$ なので，$q_1+r_1=\frac{2}{3}$ となり $n=1$ のときも上の式は成立する）

よって，$2p_n+\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)\right\}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

これより，

$$\begin{aligned}p_n&=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

x_n が平方数ということを $2^{\text{偶数}}3^{\text{偶数}}5^{\text{偶数}}$ であるというように言えるかがポイントでしょう。

2，3，5 の指数の偶奇を分類して，どの目が出たらどのタイプになるのかを調べることで状態推移図が作れれば，あとは漸化式の処理となります。

確率漸化式の問題であることがあまり匂ってこない部分と，p_n 単独で漸化式が作れない（自分で補助の確率 q_n，r_n，s_n などを導入しないといけない）ことを考えるとかなりの難問に属する問題だと思います。

しかも４種類の文字の連立漸化式の処理となるため，処理に手間取るでしょう。

出てきた結果は検算してみるとよいでしょう。

$p_1=\frac{1}{3}$（1，4 が出る確率），$p_2=\frac{2}{9}$（(1) の結果）

なので確かめてみますと

$$p_1=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{18}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

$$p_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{18}=\frac{9+3+4}{72}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$$

となり，大丈夫そうですね。

$2^{◎}3^{□}5^{▽}$ という形における指数部分の偶奇の選択肢が $2\cdot2\cdot2=8$ 通りあることも考えると $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{8}$ という結果も安心材料の１つでしょう。