a_1，a_2，a_3，…，a_n を実数とするとき

$$[a_1-a_2]+[a_2-a_3]+[a_3-a_4]+\cdots+[a_{n-1}-a_n]+[a_n-a_1]$$

の最大値と最小値を求めよ。

ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

＜ 自作 ＞

【戦略】

一般に $[x]=M$ とすると，$M\leqq x<M+1$ となりますから，上からと下からで範囲を絞っていきます。

$[a_1-a_2]$，$[a_2-a_3]$，… **は整数なので，範囲が絞られれば最大値と最小値の候補が特定されます。**

あとはその値にちゃんとなり得るかを個別に調べればいいですね。

最大となるケースを発見することは難しくありませんが，最小となるモデルケースを探すことはもしかしたら難しいかもしれません。

ただ，「こうなっててほしいな」という逆算で考えていけばどのように構築すればよいかが見えてきます。

【解答】

$$a_1-a_2-1<[a_1-a_2]\leqq a_1-a_2$$

$$a_2-a_3-1<[a_2-a_3]\leqq a_2-a_3$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}-a_n-1<[a_{n-1}-a_n]\leqq a_{n-1}-a_n$$

$$a_n-a_1-1<[a_n-a_1]\leqq a_n-a_1$$

よって，辺々加えると，

$$-n<[a_1-a_2]+[a_2-a_3]+[a_3-a_4]+\cdots+[a_{n-1}-a_n]+[a_n-a_1]\leqq 0$$

$[a_1-a_2]+[a_2-a_3]+[a_3-a_4]+\cdots+[a_{n-1}-a_n]+[a_n-a_1]$ は整数であることを考えると

$$-n+1\leqq[a_1-a_2]+[a_2-a_3]+[a_3-a_4]+\cdots+[a_{n-1}-a_n]+[a_n-a_1]\leqq 0 \quad \cdots(*)$$

一例として，a_1，a_2，…，a_n が全て整数のとき，$(*)$ の最右辺の等号が成立する。

また，一例として $-1<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{n-1}<a_n<0$ を満たすように a_1，a_2，…，a_n を定めると，

$$\begin{gathered}-1<a_1-a_2<0\\-1<a_2-a_3<0\\-1<a_3-a_4<0\\\vdots\\-1<a_{n-1}-a_n<0\\0<a_n-a_1<1\end{gathered}$$

むしろこうなっててほしいという思いが先にあってこのように構築したのです。

であるから，

$$[a_1-a_2]+[a_2-a_3]+[a_3-a_4]+\cdots+[a_{n-1}-a_n]+[a_n-a_1]=-n+1$$

となり，$(*)$ の最左辺の等号が成立する。

以上から，求める最大値は 0，最小値は $-n+1$ …答

【総括】

見かけはウッと思うかもしれませんが，いざやってみるとコロッと倒せてしまったという人も多いのではないでしょうか。

不等号から最大最小を出すときは必ず等号成立条件について言及しましょう。

テストで 100 点以下だからと言って最高点が 100 点とは限りません。
実際に 100 点の人がいて，初めて最高点が 100 点と言えます。
（もちろん 0 点以上だからと言って最低点も 0 点とは限りません。）