n を正の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_{n+1}=\left| -\dfrac{3}{2}{a_n}^2+\dfrac{17}{2}a_n-10 \right| \\ a_1=3 \end{cases}$$

によって定める。

また，数列 $\{b_n\}$ を

$$\begin{cases} b_{n+1}=a_nb_n \\ b_1=1 \end{cases}$$

によって定める。このとき，$\sum_{k=1}^{3n+1} b_k$ を n を用いて表せ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

得体のしれない漸化式です。

機械的な処理ができそうにないので，実験をして手を動かしていきたいと思います。

計算方法に規則性があるかもしれません。
計算結果に規則性があるかもしれません。

何かこの漸化式を攻略するとっかかりを掴みにいきましょう。

a_2，a_3，a_4 と計算していくと，$a_4=3$ となり，初項 a_1 の値になるため，これ以降は周期性をもつことに気が付きたいところです。

これにより，$\{a_n\}$ については攻略できました。

次に $\{b_n\}$ についてですが，$b_{n+1}=a_nb_n$ と倍率にあたる部分が周期 3 で変化していくことから，$\{b_n\}$ についても 3 項ごとに式が変わっていくことが考えられます。

つまり，b_{3k}，b_{3k+1}，b_{3k+2} について考えていく方向に思考が向かえば前進です。

これらを式として Get できれば，あとは 3 個ずつをセットにして $\sum$ 計算していけばよいことになります。

【解答】

$$a_2=\left| -\frac{3}{2}\cdot 3^2+\frac{17}{2}\cdot 3-10 \right|=\left| -\frac{27}{2}+\frac{51}{2}-\frac{20}{2} \right|=\left|\frac{4}{2}\right|=2$$

$$a_3=\left| -\frac{3}{2}\cdot 2^2+\frac{17}{2}\cdot 2-10 \right|=|-6+17-10|=|1|=1$$

$$a_4=\left| -\frac{3}{2}\cdot 1^2+\frac{17}{2}\cdot 1-10 \right|=\left| -\frac{3}{2}+\frac{17}{2}-\frac{20}{2} \right|=\left|-\frac{6}{2}\right|=3$$

$a_4=a_1$ より，数列 $\{a_n\}$ は 3，2，1 を繰り返す。

すなわち，$k=1$，2，3，…… に対して $\begin{cases} a_{3k-2}=3 \\ a_{3k-1}=2 \\ a_{3k}=1 \end{cases}$

これより

$$\begin{aligned} b_{3k+2}&=a_{3k+1}b_{3k+1} \\ &=3\,b_{3k+1} \\ &=3\,a_{3k}b_{3k} \\ &=3\,b_{3k} \\ &=3\,a_{3k-1}b_{3k-1} \\ &=6\,b_{3k-1} \end{aligned}$$

これより，数列 $\{b_{3k-1}\}$ は 初項 $b_2=a_1b_1=3$，公比 6 の等比数列だから，

$b_{3k-1}=3\cdot 6^{k-1}$

$b_{3k}=a_{3k-1}\,b_{3k-1}=2\cdot 3\cdot 6^{k-1}=6^k$

$b_{3k+1}=a_{3k}\,b_{3k}=1\cdot 6^k=6^k$

求める和を S とする。

$$\begin{aligned} S&=b_1+(b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7)+\cdots\cdots+(b_{3n-1}+b_{3n}+b_{3n+1}) \\ &=b_1+\sum_{m=1}^{n}(b_{3m-1}+b_{3m}+b_{3m+1}) \\ &=1+\sum_{m=1}^{n}(3\cdot 6^{m-1}+6^m+6^m) \\ &=1+\sum_{m=1}^{n}(15\cdot 6^{m-1}) \\ &=1+\frac{15(6^n-1)}{6-1} \\ &=1+3(6^n-1) \\ &=3\cdot 6^n-2 \;\cdots\; \text{答} \end{aligned}$$

【総括】

仕掛けが見抜ければ大したことはないのですが，漸化式を変形して何とかしようという態度では何ともなりません。

漸化式においては「形特有の式変形や対応」を覚えておいて，機械的に処理をするという態度の問題が多くを占めますし，その態度自体を否定するつもりはなく，むしろ基本としては大切だと思います。

しかし，あなたが勉強したにもかかわらず，それでもなお見たことのない漸化式と出会ったら，一番原始的な「実験」という態度がパワフルな効果を発揮するということを心に留めておいてもらえたらと思います。