O を原点とする座標空間上の平面 $H : x+y+z=6$ があり，H 上の円 C を次のように定める。

C：点 $(2,\ 2,\ 2)$ を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円

このとき，次の問に答えよ。

(1) 円 C 上の点 P に対して，P の位置に関わらず線分 OP の長さは常に一定値をとることを証明せよ。

(2) 円 C 上の点 P のうち，z 座標が最大のものと，最小のものをそれぞれ P_1，P_2 とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ のなす角を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3) 原点 O を頂点とし，円 C を底面とする円錐を K とする。K を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) **$\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ が H 上にあることは，H の方程式が与えられていることから即 $X+Y+Z=6$ と翻訳できます。**

C が斜めの円であることから，P が C 上であることについては

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{6}\quad\left(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=6\right)$$

と翻訳します。($\mathrm{A}(2,\ 2,\ 2)$ とする。)

これにより， $\begin{cases} X+Y+Z=6 & \cdots ① \\ (X-2)^2+(Y-2)^2+(Z-2)^2=6 & \cdots ② \end{cases}$

という 2 式を得て，さらにこの 2 式から $X^2+Y^2+Z^2=18$ を得ます。

これは $\mathrm{OP}=3\sqrt{2}$ であることを意味するため題意が示されます。

(2) **3 文字の基本対称式のうち $X+Y+Z=6$ は得られていますし $\begin{cases} X+Y+Z=6 \\ X^2+Y^2+Z^2=18 \end{cases}$ という 2 式から $XY+YZ+ZX=9$ も得られます。**

残る XYZ についてですが，これは特定されることはありません。
(コイツまで特定されてしまったら P が定まってしまいます。)

なので，$XYZ=k$ とおくと，X，Y，Z が t についての 3 次方程式

$$t^3-6t^2+9t-k=0$$

の 3 つの実数解ということになります。

この 3 次方程式が重解も含めて 3 つの実数解をもつことになるため，そのための k の範囲を求めにいこうと考えれば，

$$t^3-6t^2+9t=k$$

と定数分離をすることが手なりに取れるはずです。

その過程で，Z (上の方程式の実数解の 1 つ) としてあり得る値も見えてきます。

(3) **円錐の回転体は「母線の通過領域」と捉えても差し支えありません。**

一斉に母線を回転させると訳が分かりませんが，母線をまず 1 つの平面上に集めて，スタートラインを揃えてから一斉にヨーイドンで回します。(バラバラにスタートしようが一斉スタートだろうが通過領域は変わりません)

今回は扇形を一斉スタートで回しますが，その中心角が (2) で扱った α であることに気が付いてください。

【解答】

(1) $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 2)$ とし，C 上の点 P の座標を $(X,\ Y,\ Z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X-2 \\ Y-2 \\ Z-2 \end{pmatrix}$$

であり，P が H 上かつ C 上を動くので，

$\begin{cases} X+Y+Z=6 \\ |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=6 \end{cases}$ ，すなわち

$$\begin{cases} X+Y+Z=6 & \cdots ① \\ (X-2)^2+(Y-2)^2+(Z-2)^2=6 & \cdots ② \end{cases}$$

を共に満たす。

② より，$X^2+Y^2+Z^2-4(X+Y+Z)+12=6$

① を代入して $X^2+Y^2+Z^2-24+12=6$ で，

$$X^2+Y^2+Z^2=18 \cdots ③$$

を得る。

これより，$\mathrm{OP}=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=3\sqrt{2}$ となり，線分 OP の長さは P の位置に関わらず一定値 $3\sqrt{2}$ をとる。

(2) $(X+Y+Z)^2-2(XY+YZ+ZX)=X^2+Y^2+Z^2$ でなので，

①，③ から $36-2(XY+YZ+ZX)=18$

これより $XY+YZ+ZX=9 \cdots ④$

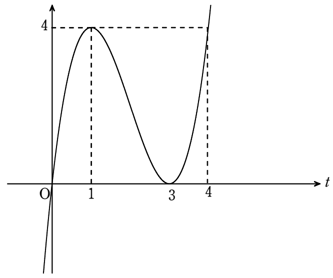
$XYZ=k \cdots ⑤$ とおくと，①，④，⑤ から X，Y，Z は t についての 3 次方程式

$$t^3-6t^2+9t-k=0,\ すなわち\ t^3-6t^2+9t=k$$

の実数解である。

$f(t)=t^3-6t^2+9t$ とおくと，$f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	4	↘	0	↗



X，Y，Z は $y=f(t)$ と $y=k$ のグラフの交点の t 座標であり，X，Y，Z の全てが実数として存在するための条件は $0 \leqq k \leqq 4$

その範囲の中で k を動かすとき

$t^3-6t^2+9t=k$ の実数解としてあり得るなかで最大のものは 4
$t^3-6t^2+9t=k$ の実数解としてあり得るなかで最小のものは 0

よって，

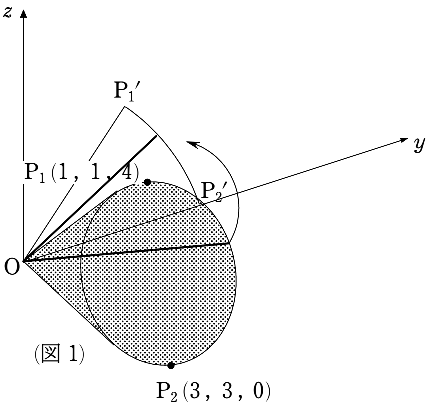
Z としてあり得る値の最大値は 4（このとき $X=Y=1$）

Z としてあり得る値の最小値は 0（このとき $X=Y=3$）

ゆえに，$P_1(1,1,4)$，$P_2(3,3,0)$

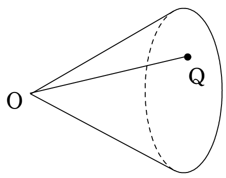
したがって，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1}|\,|\overrightarrow{OP_2}|}=\dfrac{1\cdot 3+1\cdot 3+4\cdot 0}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$ …答

(3) 母線を題意を満たすように O を中心として回転させ，
平面 $x=0$ に乗せる。((図 1) 参照)



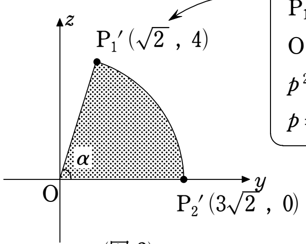
(図 1)

円 C の内部の点 Q に対して，OQ<(母線の長さ)



よって，題意の回転体は

$p>0$ として
$P_1'(p,4)$ とおけば
$OP_1'=3\sqrt{2}$ より
$p^2+16=18$ で
$p=\sqrt{2}$ を得ます。



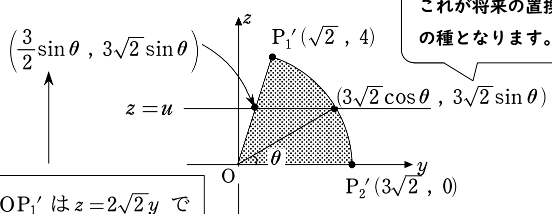
(図 2)

(図 2) の斜線部（半径 $3\sqrt{2}$，中心角 α の扇形）を z 軸を中心として
1 回転してできる立体である。
（母線 OP_1，OP_2 の回転後の線分をそれぞれ OP_1'，OP_2' としている）

この回転体を $z=u$（$0\leqq u\leqq 4$）で切った断面積 S は，

(図 3) のように θ（$0\leqq\theta\leqq\alpha$）をとると

$u=3\sqrt{2}\sin\theta$
これが将来の置換積分の種となります。



直線 OP_1' は $z=2\sqrt{2}y$ で
$z=3\sqrt{2}\sin\theta$ のとき
$y=\dfrac{3}{2}\sin\theta$

(図 3)

$$
\begin{aligned}
S&=\pi(3\sqrt{2}\cos\theta)^2-\pi\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2\\
&=\pi\left(18\cos^2\theta-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)\\
&=\pi\left\{18\cos^2\theta-\frac{9}{4}(1-\cos^2\theta)\right\}\\
&=\pi\left(\frac{81}{4}\cos^2\theta-\frac{9}{4}\right)
\end{aligned}
$$

以下

$$u=3\sqrt{2}\sin\theta\ \cdots(☆)$$

であることに注意する。

求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V&=\int_0^4 S\,du\\
&=\int_0^\alpha S\frac{du}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^\alpha \pi\left(\frac{81}{4}\cos^2\theta-\frac{9}{4}\right)3\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta\quad\left(\because (☆) より\ \frac{du}{d\theta}=3\sqrt{2}\cos\theta\right)\\
&=\frac{27\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^\alpha(9\cos^3\theta-\cos\theta)\,d\theta
\end{aligned}
$$

u	$0\ \to\ 4$
θ	$0\ \to\ \alpha$

ここで，
$$
\begin{aligned}
\int\cos^3\theta\,d\theta&=\int(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\
&=\int\{\cos\theta-(\sin\theta)^2\cos\theta\}\,d\theta\\
&=\sin\theta-\frac{1}{3}(\sin\theta)^3+A\ (A\ は積分定数)
\end{aligned}
$$

ゆえに，
$$
\begin{aligned}
V&=\frac{27\sqrt{2}}{4}\pi\Big[9\sin\theta-3(\sin\theta)^3-\sin\theta\Big]_0^\alpha\\
&=\frac{27\sqrt{2}}{4}\pi\Big[8\sin\theta-3(\sin\theta)^3\Big]_0^\alpha\\
&=\frac{27\sqrt{2}}{4}\pi(8\sin\alpha-3\sin^3\alpha)
\end{aligned}
$$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ で，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{27\sqrt{2}}{4}\pi\left(8\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-3\cdot\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)\\
&=48\pi\ \cdots 答
\end{aligned}
$$

【総括】

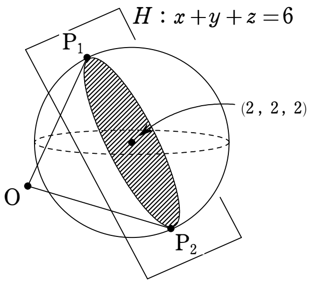
(3) がメインディッシュなのですが，そこで利用することになる誘導 (1)，(2) もそんなに雑魚敵というわけではありません。

特に，X，Y，Z に関する対称式の条件から 3 次方程式の解と係数の関係を持ち出す部分は差がつく要素だと思います。

ちなみに，(1) で現れた

$$\begin{cases} X+Y+Z=6 \\ (X-2)^2+(Y-2)^2+(Z-2)^2=6 \end{cases}$$

という形は，今回の斜めの円 C が
「(2，2，2) を中心とした半径 $\sqrt{6}$ の球」を平面 $x+y+z=6$ で切った
切り口の円であることを意味します。



(3) の円錐の回転体は，一般の回転体に比べて工夫の余地のあるテーマです。

”母線を集めてから回す”

という態度で著しく労力が軽減されることになります。