関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ について，次の問に答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフを凹凸まで調べてかけ。

(2) c を定数とし，$y=f(x)$ と $y=c$ が相異なる交点 A，B をもつときを考える。線分 AB の中点を M としたとき，c の値に関わらず，M は曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上にあることを証明せよ。

(3) c を定数とし，$y=f(x)$ と $y=c$ が相異なる交点 A，B をもつとき，$y=f(x)$ と $y=c$ で囲まれた部分の面積は c の値に関わらず，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ によって 2 等分されることを証明せよ。

【戦略】

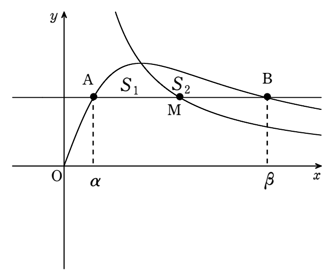
(1) **計算ミスに注意して処理するだけですが，奇関数であることを見抜き，労力を半減したいところです。**

(2) $\begin{cases} y=c \\ y=\dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases}$ **という 2 式を連立した，** $cx^2-2x+c=0$ **という 2 次方程式の異なる 2 実解** α，β **が** $y=f(x)$，$y=c$ **の交点の** x **座標ということになります。**

中点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, c\right)$ **が** $y=\dfrac{1}{x}$ **上にあることを示せばよいので**

$c=\dfrac{2}{\alpha+\beta}$ **を目指すのですが，解と係数の関係から** $\alpha+\beta=\dfrac{2}{c}$ **なので即解決します。**

(3) **面積の 2 等分を示すにあたり**



図のように $S_1=S_2$ **を目指すのは気が引けます。**

S_1，S_2 **どちらにせよ積分区間によって被積分関数が変わるので，できることなら** S_1，S_2 **両方を計算するのはなぁ … と感じます。**

ですから， $S=S_1+S_2$ **としたとき，** $S=2S_1$ **であることを目指して** S，S_1 **を計算していきます。**

S，S_1 **はともに** α，β，c **が入り混じった式となりますが，先ほどの解と係数の関係から** $\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2}{c} \\ \alpha\beta=1 \end{cases}$ **を用いれば 2 文字分消去できます。**

ここでは α **のみの式を目指していきます。**

【解答】

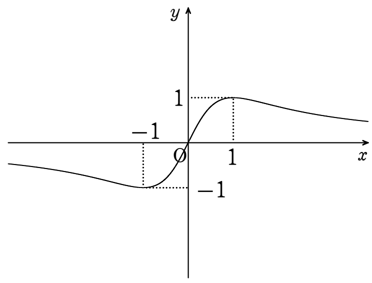
(1) $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=-\dfrac{4x(x^2+1)^2-(2x^2-2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

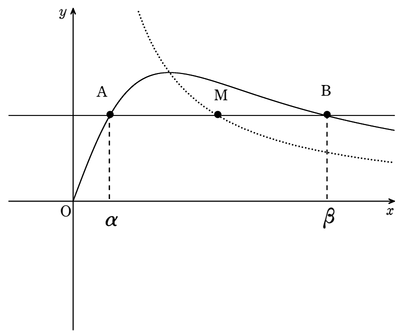
$f(x)$ が奇関数であることに注意して，$x\geqq 0$ で考える。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

$y=f(x)$ のグラフが原点対称であることに注意してグラフをかくと，以下のようになる。



(2) $y=\dfrac{1}{x}$ も奇関数ゆえ，$x\geqq 0$ で考えれば十分である。



$y=f(x)$，$y=c$ の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。

（異なる 2 つの交点をもつには $0<c<1$）

$\dfrac{2x}{x^2+1}=c$，すなわち $cx^2-2x+c=0$ の異なる 2 つの実数解が α，β であるので，解と係数の関係から

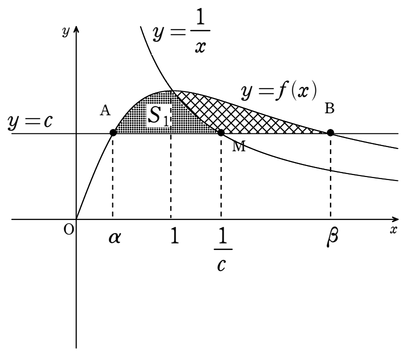
$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2}{c} & \cdots ① \\ \alpha\beta=1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{c}$

これより，$c=\dfrac{2}{\alpha+\beta}$ を得るため，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, c\right)$ は $y=\dfrac{1}{x}$ 上にあるということが言える。

ゆえに，M は c の値に関わらず $y=\dfrac{1}{x}$ 上にある。

(3)　(2) 同様 $x \geqq 0$ の範囲で考えれば十分である。



$y=f(x)$, $y=c$ で囲まれた部分の面積を S とし，

$y=f(x)$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=c$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{2x}{x^2+1}-c\right\}dx\\
&=\Big[\log(x^2+1)-cx\Big]_{\alpha}^{\beta}\\
&=\log\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}-c\,(\beta-\alpha)\\
&=\log\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}-\frac{2\,(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}\quad(\because ①)\\
&=\log\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+1}{\alpha^2+1}+\frac{2\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}\quad(\because ②)\\
&=\log\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2(\alpha^2+1)}+\frac{2\,(\alpha^2-1)}{\alpha^2+1}\\
&=\log\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2\,(\alpha^2-1)}{\alpha^2+1}\\
&=2\left(\log\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\right)
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_{\alpha}^{1}\left\{\frac{2x}{x^2+1}-c\right\}dx+\int_{1}^{\frac{1}{c}}\left(\frac{1}{x}-c\right)dx\\
&=\Big[\log(x^2+1)-cx\Big]_{\alpha}^{1}+\Big[\log x-cx\Big]_{1}^{\frac{1}{c}}\\
&=\log\frac{2}{\alpha^2+1}-c\,(1-\alpha)+\log\frac{1}{c}-c\left(\frac{1}{c}-1\right)\\
&=\log\frac{2}{c\,(\alpha^2+1)}+c\alpha-1\\
&=\log\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+1}+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}-1\quad(\because ①)\\
&=\log\frac{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha^2+1}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\quad(\because ②)\\
&=\log\frac{\alpha^2+1}{\alpha\,(\alpha^2+1)}+\frac{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}\\
&=\log\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}
\end{aligned}$$

ゆえに，$2S_1=S$ が成立し，題意は示された。

【総括】

(1) のグラフの図示は試験場では落とせません。(2) 以降が本当の勝負になるでしょう。

ただ，(2) 以降も，何を示せばよいのかを見失うようなことはないと思います。

基本的には解と係数の関係を利用しながら進めることになるでしょうが，肝となる関係式をきちんと整理して立式していき，できる限り読み手にやさしい答案をつくることに注力してください。

ちなみに $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ というグラフの性質 (本問で問いにした内容) はそれなりに有名な性質です。

別にその知識の有無で差がつくわけではありませんし，割とキレイな性質をもっていることを考えると，基本的な微積分の問題として狙われてもおかしくない一問でしょう。