a を $a>0$ である定数とする。$f(x)=t|\sin x|+|\cos x|$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を $M(a)$ とする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t=1$ のとき，$M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $M(\pi)=1$ となるような t の値の範囲を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で考えるため，絶対値は普通に外れます。

さらに $t=1$ であるため，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と合成でき，範囲に気を付けながら処理するだけです。

(2) は少々厄介でしょうか。

まずは $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲における最大値について考えるにあたり

(i) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ **という区間に分けて考えます。**

この区間で絶対値の外れ方が異なってくるためです。

(i) のときは $f(x)=t\sin x+\cos x$ と絶対値が外れます。

ここからさらに $f(x)=\sqrt{t^2+1}\sin(x+\alpha)$ と合成するのですが

この t の値によって，α が第何象限の角なのかが変わってくるため

$$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\alpha+\frac{\pi}{2}$$

という範囲によって，$\sin(x+\alpha)$，ひいては $f(x)$ のとり得る値の範囲が変わってきます。

α が第何象限なのかを考えると，$t>0$，$t=0$，$t<0$ と場合分けをすることになるでしょう。

これを丁寧に調べると，$t>0$ のとき $f(x)>1$ となる x の存在が確認できます。

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の時点でもうすでに 1 を超えることが確定するため，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲での最大値 $M(\pi)=1$ となることはなくなります。

$t<0$，$t=0$ の場合も同様に丁寧に調べると，今度は $f(x)$ は 1 までの値をとり得ることが分かります。

これでやっと半分で，次は (ii) の区間です。

今度は $f(x)=t\sin x-\cos x$ と絶対値が外れます。

同様に合成すれば $f(x)=\sqrt{t^2+1}\sin(x+\beta)$ と合成できます。

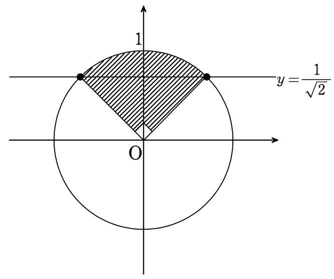
(i) のときと同様 β が第何象限なのかを考えますが，$t>0$ のときは先ほどの話から $M(\pi)=1$ となることはあり得ませんから，$t\leqq 0$ のときを調べることになるでしょう。

【解答】

(1) $t=1$ のとき $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin x\geqq 0$，$\cos x\geqq 0$ だから

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x+\cos x\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$



$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに，$1\leqq f(x)\leqq\sqrt{2}$ であり，$t=1$ のとき，$M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$ …答

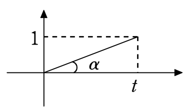
(2) $f(x)=t|\sin x|+|\cos x|$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値 $M(\pi)$ について考える。

(i) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=t\sin x+\cos x\\&=\sqrt{t^2+1}\sin(x+\alpha)\end{aligned}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\\[2mm]\cos\alpha=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{cases}\quad\cdots\cdots(*)$$

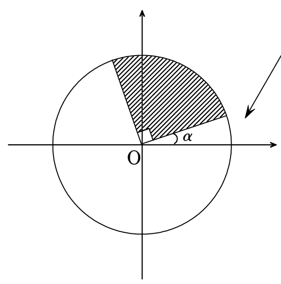
(i−1) $t>0$ のとき



$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

ここの α と ここの α は 同じです

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\alpha\leqq x+\alpha\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{2}$

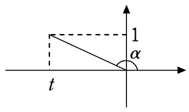


このとき，$x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\sin(x+\alpha)=1$ となり得る

ゆえに，$f(x)$ の最大値は $\sqrt{t^2+1}$（>1）となり，

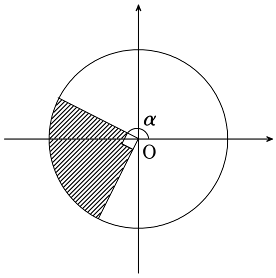
$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲での最大値を考えるにあたり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)>1$ となる x が存在するため，$M(\pi)=1$ となることはない。

(i−2)　$t<0$ のとき



$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{2}$



$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\leqq\sin(x+\alpha)\leqq\sin\alpha$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ の最大値は $\sqrt{t^2+1}\sin\alpha$

これと $(*)$ より，$f(x)$ の最大値は 1

(i−3)　$t=0$ のとき

$f(x)=\cos x$ より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値は 1

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき

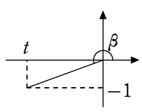
$$\begin{aligned}f(x)&=t\sin x-\cos x\\&=\sqrt{t^2+1}\,\sin(x+\beta)\end{aligned}$$

ただし，$\begin{cases}\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\\[2mm]\cos\beta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{cases}$ ……$(*)'$

(i) より，$t>0$ のときは $M(\pi)=1$ となることはない。

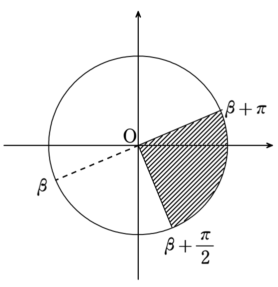
以下 $t\leqq0$ のときを考える。

(ii−1)　$t<0$ のとき



$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ で，$\dfrac{3}{2}\pi<\beta+\dfrac{\pi}{2}<2\pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\beta+\dfrac{\pi}{2}\leqq x+\beta\leqq\beta+\pi$



$$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\leqq\sin(x+\beta)\leqq\sin(\beta+\pi)$$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ において，$f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2+1}\,\sin(\beta+\pi)&=\sqrt{t^2+1}\cdot(-\sin\beta)\\&=1\quad(\because(*)')\end{aligned}$$

(ii−2)　$t=0$ のとき

$f(x)=-\cos x$ より，$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値は 1

以上より，$t\leqq0$ のとき $M(\pi)=1$ となる。

求める t の範囲は $t\leqq0$ …答

【総括】

x がどの象限かで場合分けをして絶対値を外していくという設定で，絶対値を絡めた合成タイプの三角関数の最大値をテーマで作りました。

(1) は x を第 1 象限に限定して考えるという点で，(2) の場合分けの基準をほのめかすようなヒントの設問としました。

(2) は第 1 象限，第 2 象限の場合分けをしますが，t の符号によって，合成したときの位相のずれ方が異なり，最大となる場所が違ってきますので，その中でさらに場合分けを行うことになります。

途中から自分が何をやっているか見失わないように注意してください。