(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2013}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}$ を求めよ。　＜ ’13 岡山県立大 ＞

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。＜ ’15 西南学院大 ＞

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を求めよ。＜ ’16 明治大 ＞

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}$ を求めよ。＜ ’12 甲南大 ＞

【戦略】

$\sum(b_k-b_{k+m})$ の形（差分解）を狙う手法としては「部分分数分解」も有力な手段です。

「部分分数分解」を一言で言ってしまえば「通分の逆」です。

$\dfrac{1}{(ak+b)(ak+c)}$ $(b<c)$ についての部分分数分解については

$$\frac{1}{(ak+b)(ak+c)}=\frac{1}{c-b}\left\{\frac{1}{ak+b}-\frac{1}{ak+c}\right\}$$

という恒等式を利用します。（一度通分をして体感することで感覚的にパッと式変形できるようになると思います。）

特に $a=1$ のときは

$$\frac{1}{(k+b)(k+c)}=\frac{1}{\boxed{c-b}}\left\{\frac{1}{k+b}-\frac{1}{k+c}\right\}$$

差額（何個飛びか）

です。

(1) 見た目にビビらず 1 つずつほぐしていけば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2013}\frac{2}{k(k+1)}$ となります。

単元学習の段階では

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}-\dfrac{b}{k+1}$ が k の恒等式となるように a，b を定める

と習うと思いますが

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ という部分分数分解は頻繁に登場することを考えると常識としておくことが望ましいです。

(2) 機械的に $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{a}{2k-1}-\dfrac{b}{2k+1}$ が k の恒等式となるように a，b を仕組んでもいいのですが

$2k-1$，$2k+1$ は 2 個飛びなので，

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

とパッと部分分数分解しましょう。

その後ですが，$b_k=\dfrac{1}{2k-1}$ などとおくと，目に優しい処理となると思います。（目が強い人は大げさに見えるかもしれませんが）

(3) 分母に 3 つありますが，差分解自体は

$\sum(b_k-b_{k+m})$ という「2 つの差」に分解する

ということを見失わないでください。

そのうえで

$\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算してみよう

という気持ちをもってください。

（最初は $\dfrac{a}{k(k+1)}-\dfrac{b}{(k+1)(k+2)}$ として恒等式の処理を通じて a，b を求めるということをするかもしれませんが，厳密な導出過程よりも，見つけたもん勝ちというニュアンスが強いです。

もちろん，『$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k(k+1)}-\dfrac{b}{(k+1)(k+2)}$ が k の恒等式となるような a，b を求めよ』というそれ自体が目的の問題ではきちんと導出する必要があるとは思います。）

通分してみると $\dfrac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$

と分子がニアピンです。（微調整で何とかなる範疇です）

つまり，$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ として

$b_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$ とすれば，$\sum(b_k-b_{k+1})$ の形です。

(4) なまじ因数分解ができるもんですから $\dfrac{2k^2-1}{(2k+1)(2k-1)}$ などとやってこのあと唇を噛む人が多いです。

与えられた分数式が「仮分数」（(分子の次数)≧(分母の次数) となっている分数式）で通称 ”頭でっかち” です。

頭でっかちは嫌われる

ということで，仮分数を帯分数に直します。

帯分数に直す方法は数だと $\dfrac{13}{4}=3+\dfrac{1}{4}\left(=\text{商}+\dfrac{\text{余り}}{}\right)$ と直します。

式でも同じで，割り算をしたときの商と余りを用いて直します。

ただ，今回の $\dfrac{2\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ のように商が暗算レベルで即答できれば

$$\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{\frac{1}{2}(4k^2-1)-\frac{1}{2}}{4k^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4k^2-1}$$

とスムーズに帯分数に直してください。

あとは (2) と同じです。

【解答】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2013}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}j}=\sum_{k=1}^{2013}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{2013}\frac{2}{k(k+1)}$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{2013}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)\right\}$

$\displaystyle=2\left\{1-\frac{1}{2014}\right\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{2013}{1007}}$ …答　$\left(\text{注}:\dfrac{3\cdot11\cdot61}{19\cdot53}\text{ で }\dfrac{2013}{1007}\text{ は既約分数}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$b_k=\dfrac{1}{2k-1}$ とおくと，$b_{k+1}=\dfrac{1}{2k+1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{b_1-b_{n+1}\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$ …答

解答はいきなり
「オレこんな式変形見つけちゃったぜ」
的な感じで記述すれば十分です。

(3) $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$b_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$ とおくと，$b_{k+1}=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(b_k-b_{k+1})$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_{20}-b_{21})\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{b_1-b_{21}\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{21\cdot22}\right\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{115}{462}}$ …答

(4) $\displaystyle\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{\frac{1}{2}(4k^2-1)-\frac{1}{2}}{4k^2-1}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\}$

$b_k=\dfrac{1}{2k-1}$ とおくと，$b_{k+1}=\dfrac{1}{2k+1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\{b_1-b_{n+1}\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}$

$\displaystyle=\frac{n}{2}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\}$

$\displaystyle=\frac{n}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{n^2}{2n+1}}$ …答

【総括】

$\sum(b_k-b_{k+m})$（あるいは $\sum(b_{k+m}-b_k)$）という差分解を狙っていくのが目的です。

有理化同様，部分分数分解もそのための手段の１つです。

パターン別に「$\sqrt{\quad}$ を含む → 有理化」「分数式 → 部分分数分解」などと乱暴に覚えるのではなく

「差分解からの和の中抜け
　⟶ そのための手段として有理化や部分分数分解などがある」

という押さえ方がよいと思います。

（上のように乱暴に覚えると困るような例題を第４講で扱う予定です。）