Σ 計算基本方針２【差分解からの和の中抜け】～ 有理化 ～

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。＜ '13 小樽商科大 ＞

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$ を求めよ。＜ '16 甲南大 ＞

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{124}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}$ を求めよ。＜ '11 東京薬科大 ＞

【戦略】

$\sqrt{\quad}$ が絡んだシグマ計算は有理化からの差分解を経由して「和の中抜け」を狙っていきます。

(1) は基本的な「隣り合うタイプ」

(2) は 2 つ飛びタイプ（頭２つとケツ２つが残る）

(3) は 3 乗根が絡んだ有理化

です。

【解答】

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=-\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\\
&=-\{(\sqrt{0}-\sqrt{1})+(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\}\\
&=-\{\sqrt{0}-\sqrt{n+1}\}\\
&=\sqrt{n+1}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\boldsymbol{\sqrt{n+1}}$ …答

(2) $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$

$(\text{与式})=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$

$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{1}-\sqrt{2}$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\boldsymbol{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}}$ …答

(3) $b_k=\sqrt[3]{k}$ とおく。

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}=\frac{1}{b_k{}^2+b_kb_{k+1}+b_{k+1}{}^2}$$

$$=\frac{b_k-b_{k+1}}{(b_k-b_{k+1})(b_k{}^2+b_kb_{k+1}+b_{k+1}{}^2)}$$

$$=\frac{b_k-b_{k+1}}{b_k{}^3-b_{k+1}{}^3}$$

$$=\frac{b_k-b_{k+1}}{k-(k+1)}$$

$$=-(b_k-b_{k+1})$$

$(\text{与式})=-\displaystyle\sum_{k=1}^{124}(b_k-b_{k+1})$

$=-\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_{124}-b_{125})\}$

$=-\{b_1-b_{125}\}$

$=\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{1}$

$=5-1$

$=4$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{124}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}=\boldsymbol{4}$ …答

【総括】

$\sum(b_k-b_{k+m})$ （あるいは $\sum(b_{k+m}-b_k)$ ）という差分解を狙っていくのが目的です。

そのための手段の１つとして有理化があります。

m 個差だと頭 m 個とケツ m 個が生き残ります。

(3) のような 3 乗根の有理化は

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

という 3 乗和（差）の公式が決め手となります。

（3 乗根の有理化自体，差が付くと思われます）

有理化のパートナーを見失わないようにしてください。

ただ有理化に目が奪われがちですが，今回の目的は「差分解」です。

© MathClinic