## $\Sigma$ 計算【公式確認】

次の式が成立することを証明せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k = r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \begin{cases} \dfrac{r(1-r^n)}{1-r} & (r \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ n & (r=1 \text{ のとき}) \end{cases}$

( 初項 $r$，公比 $r$ の等比数列の和)

＜(1)，(2)，(3) ’10 九州大 ’14 大分大＞

【証明】

(1) $S=1+\ 2\ +\ 3\ +\cdots\cdots+(n-1)+n$

$S=n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+\ 2\ +1$

辺々加えると $2S=(n+1)\cdot n$ より，$S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

（別証明）

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}=(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots+\{(n+1)^2-n^2\}$$

$$(\text{右辺})=(n+1)^2-1^2 = n^2+2n$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\\ &=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &=2\sum_{k=1}^{n}k+n\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n}k+n=n^2+2n$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\cdots+\{(n+1)^3-n^3\}$

$$(\text{右辺})=(n+1)^3-1^3 = n^3+3n^2+3n$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)\\ &=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n\\ &=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n\end{aligned}$$

よって $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n=n^3+3n^2+3n$

これより，

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\ &=\frac{n}{2}(2n^2+3n+1)\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=(2^4-1^4)+(3^4-2^4)+\cdots+\{(n+1)^4-n^4\}$

$$(\text{右辺})=(n+1)^4-1^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)\\ &=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\end{aligned}$$

ゆえに

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n=n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=n\{n^3+4n^2+6n+4-(n+1)(2n+1)-2(n+1)-1\}\\ &=n(n^3+2n^2+n)\\ &=n^2(n^2+2n+1)\\ &=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(4) $S=r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^n$ とおく。

$S=r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^n$

$rS=\quad\ r^2+r^3+\cdots\cdots+r^n+r^{n+1}$

辺々引くと，$(1-r)S=r-r^{n+1}$

$r \fallingdotseq 1$ のときは $S=\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ のときは $S=\overbrace{1+1+\cdots\cdots+1}^{n\text{ 個}}=n$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k = \begin{cases} \dfrac{r(1-r^n)}{1-r} & (r \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ n & (r=1 \text{ のとき}) \end{cases}$

【コメント】

$n$ が $n-1$ になっていたり，$k=0$ や，$k=2$ となっていたりといった

「イレギュラー」についてもきちんと対応しましょう。

例えば，$\sum_{k=n}^{2n} k^2$ であれば $\sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$ と見ます。

ん？となったら書き下して

$n^2+(n+1)^2+\cdots\cdots+(2n)^2$
$=\{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2\}-\{1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\}$

と「……」を用いて頭を整理するとよいでしょう。

また，$\sum_{k=1}^{n} k^4$ などは必要に応じて作ればよいのですが，自分でこれを作るためにも今回の $\sum_{k=1}^{n} k^2$ や $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の基本的な作り方については確認しておきたいわけです。