(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。(結果は因数分解すること)　＜ '14 大分大 ＞

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ を求めよ。　＜ '15 福島大 ＞

【戦略】

(1) **$\sum k$，$\sum k^2$，$\sum k^3$ の導出過程まできちんと押さえていれば方針は見えるのですが，結果だけ覚えている人からするとお手上げでしょう。**

$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ **という恒等式を利用していきます。（講義の順番が前後しますが，差分解からの和の中抜けを活用します。）**

(2) **書き下してみると**

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$$

という (等差)×(等比) **型と呼ばれるタイプです。**

これも対応を知らなければ，泡を吹いてギブアップでしょう。
（逆に言えば勉強していれば美味しく「いただきます」と言えます。）

(等差)×(等比) **型 の倒し方は**

公比をかけてずらす（カケズラ）

という態度で倒します。

【解答】

(1) $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ である。

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

が成立する。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\{(2^5-1^5)+(3^5-2^5)+\cdots\cdots+((n+1)^5-n^5)\}\\&=(n+1)^5-1\end{aligned}$$

一方，

$$(\text{右辺})=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=(n+1)^5-1$$

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=(n+1)^5-1-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=(n+1)^5-1$$
$$-10\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=(n+1)^5$$
$$-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{6(n+1)^4-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n-6\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

天下り的なのですが，$\sum k^2$ の形が出てくることを知っておくとスムーズです。

以上から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ … 答

(2) 求める和を S とおく。

公比をかけて
ずらす
（かけずら）

$$S=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\ \cdots\cdots\ +n\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S=\qquad +1\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

辺々引くと

$$S-\frac{1}{2}S=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+1\cdot\frac{1}{2^n}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{2^{n+1}-2-n}{2^{n+1}}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{2^{n+1}-2-n}{2^n}$ … 答

【総括】

(1) については同じ要領で $\sum k^5$，$\sum k^6$，… と出せるには出せるでしょう。

時間はかかるかもしれませんが，ひとまずは導出過程を身に着けておくことは重要です。

ちなみに，$S_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^m$ とおくと，今回の 4 乗和 S_4 は

$$S_4=\frac{S_2(6S_1-1)}{5}\ \left(=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1\right\}}{5}\right)$$

と表せます。（確かに本問の結果はそうなっていますね。）

$S_3={S_1}^2$ という簡単な式で表せるように，$S_4=\dfrac{S_2(6S_1-1)}{5}$ と簡潔に表示されるのは興味深いですね。

これ以上は深入りしませんが，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^m$ という一般化については，

関孝和，ヤコブ・ベルヌーイという数学者による研究が有名です。

ちなみに上の $S_4=\dfrac{S_2(6S_1-1)}{5}$ のような S_3，S_4，S_5 … 以降について

m が奇数であれば，S_m は S_1 の多項式で表せる
m が偶数であれば，$\dfrac{S_m}{S_2}$ は S_1 の多項式で表せる。

ということを見出したのはファウルハーバーという数学者です。

この事実は後にベルヌーイによって証明されることになります。

(2) の「かけずら」は知らなければ出てきません。

ちなみに等比数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1\ のとき)\\ na & (r=1\ のとき)\end{cases}$$

という公式の証明も「かけずら」で証明します。

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

は

「公差 0 の等差数列」×「公比 r の等比数列」

という (等差)×(等比) 型ですから。