e の評価【別の路線からの切り口】

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^n e^{-x}$ を考える。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x \geqq 0$ における $f_n(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

＜ ’93 広島大 ＞

【戦略】

$f_n(m)$，$f_n(m+1)$ **の大小を考えるという目論見の下，これらの比をとってみると**

$$\frac{f_n(m+1)}{f_n(m)}=\frac{(m+1)^n e^{-(m+1)}}{m^n e^{-m}} =\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$$

となります。

そこで，示すべき形から，$m=n-1$ の場合と，$m=n$ の場合を考えることになるでしょう。

すなわち，

$f_n(n-1)$ **と** $f_n(n)$ **の大小比較　及び** $f_n(n)$ **と** $f_n(n+1)$ **の大小比較**

から切り崩せばよいでしょう。

解答では逆算的にまとめます。

【解答】

(1)　$f_n{}'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}$

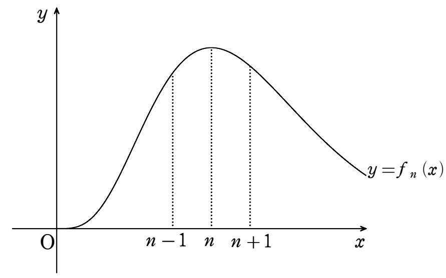
$\qquad =e^{-x}x^{n-1}(n-x)$

$x \geqq 0$ において，$x^{n-1} \geqq 0$ であり，$e^{-x}>0$ でもあるため，
$x \geqq 0$ における増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f_n{}'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0	↗		↘

ゆえに，求める最大値は $f_n(n)=n^n e^{-n}$ … 答

(2)



$f_n(n-1)<f_n(n)$ であるので $(n-1)^n e^{-(n-1)}<n^n e^{-n}$

両辺 e^{-n}（>0）で割ると，$e(n-1)^n<n^n$ を得る。

$n \geqq 2$ に対して，

$$e<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \right) \cdots ①$$

一方，$f_n(n+1)<f_n(n)$ であるので $(n+1)^n e^{-(n+1)}<n^n e^{-n}$

両辺 e^{-n}（>0）で割ると，$\frac{1}{e}(n+1)^n<n^n$ を得る。

これより，$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e$，すなわち $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ … ②

①，② より，$n \geqq 2$ に対して

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

が成立する。

【総括】

東大の問題

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \qquad (x>0)$$

と比べると計算量的には抑えられています。

設定１つ，誘導１つで問題の表情やシナリオが大きく変わるのは面白さと奥深さを感じます。