e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

＜ '16 東京大 ＞

【戦略】

例えば，$f(x)=e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ と設定しても，$f'(x)$ を計算する際，特に $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ の微分をする際に困ります。

底にも指数部分にも変数 x が入っている際は「対数微分法」と呼ばれる手法で微分するのが常套手段です。

つまり，$\log$ をとってから微分するのです。

【解 1】

$x>0$ で定義される 2 つの関数

$$f_1(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ f_2(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

を考える。

$\log f_1(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ であり，両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}&=\{\log(x+1)-\log x\}+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\ (=g_1(x)\ \text{と呼ぶ})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1'(x)&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=-\frac{1}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

$x>0$ の範囲で $g_1'(x)<0$ なので，$x>0$ の範囲で $g_1(x)$ は単調減少。

また，$\lim_{x\to\infty}g_1(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$

これに加えて，$g_1(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，

$x>0$ の範囲で $g_1(x)>0$ であることが言える。

よって，$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}>0$ であり，$f_1(x)>0$ であることから $f_1'(x)>0$

ゆえに，$x>0$ の範囲で $f_1(x)$ は単調増加であり，$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=e$

$f_1(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，$x>0$ の範囲で

$$f_1(x)<e\ \cdots ①$$

が成立する。

一方，$\log f_2(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ であり，両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}&=\{\log(x+1)-\log x\}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right\}\\&=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}\ (=g_2(x)\ \text{とおく})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_2'(x)&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(x+1)-(2x+1)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}\\&=\frac{2x^2(x+1)-2x(x+1)^2+2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}\\&=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}\end{aligned}$$

よって，$g_2'(x)>0$ であり，$g_2(x)$ は $x>0$ の範囲で単調増加。

さらに，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}g_2(x)&=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2x+1}{2x^2+2x}\right\}\\&=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}\right\}\\&=0\end{aligned}$$

これに加えて，$g_2(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，

$x>0$ の範囲で $g_2(x)<0$ であることが言える。

よって，$\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}<0$ であり，$f_2(x)>0$ であることから $f_2'(x)<0$

ゆえに，$x>0$ の範囲で $f_2(x)$ は単調減少であり，$\lim_{x\to\infty}f_2(x)=e$

$f_2(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，$x>0$ の範囲で

$$f_2(x)>e\ \cdots ②$$

①，② より $x>0$ において $f_1(x)<e<f_2(x)$，すなわち

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

が成立する。

【戦略 2】

対数微分法によってどうせ $\log$ をとるのであれば，示すべき不等式の方に $\log$ をとってもよいでしょう。

すぐに微分に飛びつくのではなく，ギリギリまで示すべき不等式を簡単にしてから処理することを考えます。

今回については

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad(x>0)$$

$$x\{\log(x+1)-\log x\}<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}\quad(x>0)$$

$$\begin{cases} x\{\log(x+1)-\log x\}-1<0 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1>0 \end{cases}\quad(x>0)$$

と示すべき目標を変形していきますが，$\log$ に x がかかっているのは嫌なので，さらに

$$\begin{cases} \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}<0 \\ \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}>0 \end{cases}$$

と見たいところです。

分数関数が現れてしまいますが，1 回目の微分の段階で $\log$ が消えてくれる嬉しさの方が勝るでしょう。

この手の方針をとる場合，必ず強調したいこととしては

「～～を示せばよい」

ということをはっきりと明示することです。

本来示すべき対象をいじったり，前提にして話を進めるのはおかしなことです。

あくまで，頭の中で逆算的に
「これを示したいんだったらこれが言えればいいな」
とやっているだけなので，そこを明確にするように記述することを心がけてください。

それかいっそのこといきなり

$$\begin{cases} \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}<0 \\ \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}>0 \end{cases}$$ **が成り立つことを証明してしまって**

遡っていき，「題意は示された」と天下り式で書いてもよいでしょう。

【解 2】

示すべき不等式は

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad(x>0)$$

すなわち，

$$x\{\log(x+1)-\log x\}<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}\quad(x>0)$$

これは，$\begin{cases} x\{\log(x+1)-\log x\}-1<0 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1>0 \end{cases}$ $(x>0)$ と変形でき，

$x>0$ の下では

$$\begin{cases} \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}<0 \quad \cdots ① \\ \log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}>0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

と変形できるので，これが成り立つことを示せば題意は示されることになる。

以下 ①，② が成り立つことを示す。

$f(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}$$

$x>0$ の範囲で $f'(x)>0$ なので，$x>0$ の範囲で $f(x)$ は単調増加である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\}=0$

これらに加え，$f(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，$x>0$ の範囲で $f(x)<0$ が成立し，① が示された。

$g(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$x>0$ の範囲で $g'(x)<0$ なので，$x>0$ の範囲で $g(x)$ は単調減少である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right\}=0$

これらに加え，$g(x)$ は $x>0$ の範囲で連続関数であることを加味すると，$x>0$ の範囲で $g(x)>0$ が成立し，② が示された。

以上から，題意は示された。

【総括】

試験場でどこまでの余裕があるかは分かりませんが，出来ることなら【解 2】のように，示すべき不等式を限界まで簡単にしてから処理するような工夫をしたいところです。

なお，$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$ に対して，$f(x)=e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ と見ることで

$$f'(x)=e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left\{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'$$

と見ることもできます。($A=e^{\log A}$ という見方)

※ 「e の肩に乗っけると A になっちゃう数」のことを $\log A$ と定義しているのですから，「実際に」 e の肩に乗っけたら A になるに決まっています。

さて，本問の不等式がどこから登場したのかを一般的に検証してみたいと思います。

＜検証＞

任意の正の実数 x に対して

常に $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}<e$ となるような a の最大値

常に $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+b}>e$ となるような b の最小値

を考えたいわけです。

これを考えるにあたっては

任意の正の実数 x に対して

常に $(x+a)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<1$ となるような a の最大値

常に $(x+b)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>1$ となるような b の最小値

を考えればよいわけです。

そこで，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+c)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=(x+c)\{\log(x+1)-\log x\}\quad(x>0)\end{aligned}$$

とおきます。

詳しい計算過程は各自確かめてほしいのですが

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+\frac{c-1}{x+1}-\frac{c}{x}$$

となります。

さらに，$f''(x)$ を計算すると

$$f''(x)=\frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}$$

となります。

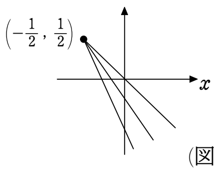
分母は正なので，分子の符号だけを追っていくことにします。

分子の値の振る舞いを視覚化するために $y=(2c-1)x+c$ のグラフを考えるのですが

この直線は $(2x+1)c-x-y=0$ という方程式なので，c の値に関わらず，$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通ることになり，そこに注意します。

$c \leqq 0$ のとき

$f''(x)$ の分子は $x>0$ の範囲で負なので
((図 1) 参照)



(図 1)

$f'(x)$ は $x>0$ の範囲で単調減少となり
$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ であることも考えると

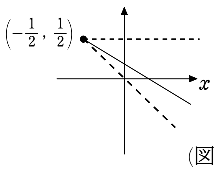
$x>0$ の範囲で $f'(x)>0$ となり，$f(x)$ は単調増加

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ であることも考えると，

$x>0$ の範囲で常に $f(x)<1$ であることが言えます。

$0<c<\dfrac{1}{2}$ のとき

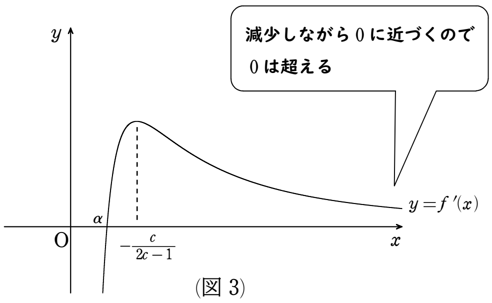
$f''(x)$ の分子は $x=-\dfrac{c}{2c-1}$ という値
を境に正から負へと符号変化を起こします。
((図 2) 参照)



(図 2)

x	(0)	$\cdots$	$-\dfrac{c}{2c-1}$	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗		↘	0

$$f'(x)=\log(x+1)+\frac{c-1}{x+1}-\frac{1}{x}(x\log x+c)$$
$$\lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\log X^{-1}=\lim_{X\to\infty}-\frac{\log X}{X}=0$$



(図 3)

(図 3) を参考に $f'(x)$ の符号を判定し，

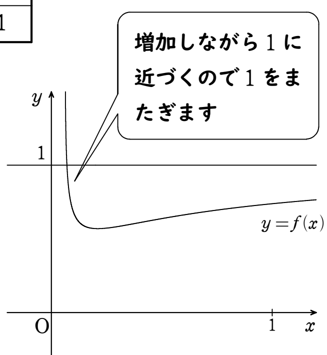
x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘		↗	1

という増減表を得ます。

このことから $y=f(x)$ の
グラフは (図 4) のようになり

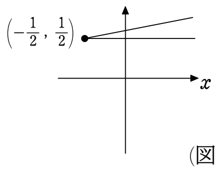
$x>0$ の範囲で
常に $f(x)>1$ とはならないし，
常に $f(x)<1$ ともならない

ことになります。



(図 4)

$c \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき



(図 5)

$f''(x)$ の分子は $x>0$ の範囲で正なので
((図 5) 参照)

$f'(x)$ は $x>0$ の範囲で単調増加となり
$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ であることも考えると

$x>0$ の範囲で $f'(x)<0$ となり，$f(x)$ は単調減少

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ であることも考えると，

$x>0$ の範囲で常に $f(x)>1$ であることが言えます。

このことから，すべての正の実数 x に対して

$$(x+a)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1 \text{ となるような } a \text{ の最大値は } 0$$

$$(x+b)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)>1 \text{ となるような } b \text{ の最小値は } \frac{1}{2}$$

となることが分かりました。

これはすなわち

すべての正の実数 x に対して

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+b}$$

が成り立つようにギリギリ限界まで a，b の値を攻めるとなると

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

とするのが最善であることを意味します。