定数 b，c，p，q，r に対し，

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき，q，r を p，b で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。b，c が定数 a を用いて

$$b=(a^2+1)(a+2),\quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

＜ '21 東京大 ＞

【戦略】

(1) **与えられた恒等式について，素直に係数比較をすればよいでしょう。**

x^2 **の係数について比較すると** $-p^2+q+r=0$
x **の係数について比較すると** $p(r-q)=b$
定数項について比較すると $qr=c$

が得られて，$p\neq 0$ **に注意すれば** $q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right)$，$r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)$

を得て解決です。

(2) **何が聞かれているのか意味が分からないかもしれませんが，要するに**

『$b=○$，$c=□$ **とすると** $q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{○}{p}\right)$，$r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{○}{p}\right)$
と表せて，$qr=c$ **という式から**

$□=\dfrac{1}{4}\left(p^2-\dfrac{○}{p}\right)\left(p^2-\dfrac{○}{p}\right)$ **という「**p，a **についての等式」**

が得られるんだけど，この等式を

$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$ **という形に変形してね。』**

という問いかけです。

(3) **もちろん (1)，(2) を使うのでしょう。ただ，その活用法については見づらいかもしれません。**

一旦，「(1)，(2) に頼らずに解いてみよう」という態度で進めていくと途端に (1)，(2) のありがたみが分かります。

【解答】

(1) 与えられた恒等式は

$$x^4+bx+c=x^4+(-p^2+q+r)x^2+(pr-pq)x+qr$$

x^2 の係数について比較すると $-p^2+q+r=0$ …①

x の係数について比較すると $p(r-q)=b$ …②

定数項について比較すると $qr=c$ …③

①，② について 条件 $p\neq 0$ に注意して整理すると

$$\begin{cases} q+r=p^2 \\ -q+r=\dfrac{b}{p} \end{cases}$$

これら 2 式から $q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right)$，$r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)$ …㊟

(2) (1) の結果を ③ に代入すると

$$\frac{1}{4}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\left(p^2+\frac{b}{p}\right)=c$$

$$p^4-\frac{b^2}{p^2}=4c$$

$$p^6-4cp^2-b^2=0$$

$b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ を代入すると

$$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

これは

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

と変形でき，求める整式 $f(t)$，$g(t)$ の 1 つとして

$$f(t)=t^2+1,\ g(t)=(t^2+1)(t+2)^2 \ \cdots㊟$$

がある。

(3) $(Ax^2+Bx+C)(Dx+Ex+F)$ (A, B, C, D, E, F は有理数)

を展開して x^4 の係数が 1 となるとき，$AD=1$

このとき，この 4 次式は

$$AD\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)\left(x^2+\frac{E}{D}x+\frac{F}{D}\right)$$

$$=(x^2+Px+Q)(x^2+Rx+S) \quad (P,\ Q,\ R,\ S \text{ は有理数})$$

という形に帰着できる。

さらに，$(x^2+Px+Q)(x^2+Rx+S)$ を展開して x^3 の係数が 0 となるとき，この 2 次式の積を展開したときの x^3 の係数は $P+R$ なので

$$P+R=0$$

となり，$R=-P$ となる。

このことから，x^4 の係数が 1，x^3 の係数が 0 である有理数係数の 4 次式が 2 次式の積に因数分解できるとしたら

$$(x^2+px+q)(x^2-px+r) \quad (p,\ q,\ r \text{ は有理数})$$

という形に限られる。

さて，与えられた 4 次式は有理数係数で，x^4 の係数が 1，x^3 の係数が 0 であることを考えると

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

(ただし，p. q. r は有理数)

という形に因数分解できるような整数 a を求めればよい。

x^2 の係数について比較すると　$-p^2+q+r=0$　…①′

x の係数について比較すると　$p(r-q)=(a^2+1)(a+2)$　…②′

定数項について比較すると　$qr=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$　…③′

(i)　$p=0$ のとき

②′より，$(a^2+1)(a+2)=0$ で，条件より a は整数だから $a=-2$

このとき，①′，③′ より，$\begin{cases} q+r=0 \\ qr=\dfrac{25}{4} \end{cases}$ なので，解と係数の関係から

q，r は X についての 2 次方程式 $X^2+\dfrac{25}{4}=0$ の解である

しかし，この解は虚数解であり，q，r が有理数とならず不適。

(ii)　$p\neq 0$ のとき

①′，②′ より

$$q=\frac{1}{2}\left\{p^2-\frac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right\},\quad r=\frac{1}{2}\left\{p^2+\frac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right\}$$

これらを ③′ に代入すると

$$\frac{1}{4}\left\{p^4-\frac{(a^2+1)^2(a+2)^2}{p^2}\right\}=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

これを整理したものが (2) で考えた等式であり

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

$p\neq 0$ のとき $p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$ であるため

$$p^2-(a^2+1)=0,\ \text{すなわち}\quad p^2=a^2+1 \quad \cdots ④$$

を得る。

$p=\pm\sqrt{a^2+1}$ であり，p が有理数として存在するので

m，n を互いに素である自然数として $\sqrt{a^2+1}=\dfrac{n}{m}$ と表せる。

このとき，$a^2+1=\dfrac{n^2}{m^2}$ で，左辺は整数なので，$\dfrac{n^2}{m^2}$ も整数

m，n は互いに素であるので，$m=1$ となるしかない。

ゆえに，$a^2+1=n^2$ で，

$$(n+a)(n-a)=1$$

n，a は整数であるので，$\begin{cases} n+a=1 \\ n-a=1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} n+a=-1 \\ n-a=-1 \end{cases}$

これより $(n,\ a)=(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を得て，n が自然数であることを考えると，$(n,\ a)=(1,\ 0)$

$a=0$ のとき，④ より，$p=\pm 1$

$q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{1}{p}\right)$，$r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{1}{p}\right)$ より，

$$(p,\ q,\ r)=\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

このとき，与えられた 4 次式 $x^4+2x-\dfrac{3}{4}$ は

$$x^4+2x-\frac{3}{4}=\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)$$

と有理数係数の 2 次式の積に因数分解できる。

以上から，求める整数 a は $a=0$ …答

【総括】

⑴ は困ることはないでしょう。

⑵ の問題文の意味が分からなかったという人も多いのではないでしょうか。

【戦略】のように噛み砕けたかが勝負なのですが，難しいと思います。

⑶ は ⑴，⑵ が誘導としてスイスイと捉えられるかが勝負なのですが，
一旦「置き換えに頼らずに解こう」という気持ちで進めていくと ⑴，⑵ の意味が逆に見えてくると思います。

この，「前問の結果に頼らないで進めていくと逆に前問の結果の活用法が見えてくる」ということは，東大の「問い方」がかなり高尚な形であることを物語っているように思います。

【補足】⑵ の因数分解について

$$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

を得た後ですが，$p^2=P$ とおくと，左辺は

$$P^3+(4a+3)(a^2+1)P-(a^2+1)^2(a+2)^2$$

となります。

結論から，$\{p^2-(a^2+1)\}$，すなわち $\{P-(a^2+1)\}$ という因数（因子）が出てくることは分かっていますから，組み立て除法により

$$\begin{array}{c|cccc|c}
a^2+1 & 1 & 0 & (4a+3)(a^2+1) & & -(a^2+1)^2(a+2)^2 \\
 & & a^2+1 & (a^2+1)^2 & & (a^2+1)^2(a+2)^2 \\
\hline
 & 1 & a^2+1 & \begin{aligned} &(4a+3)(a^2+1)+(a^2+1)^2 \\ &=(a^2+1)\{(4a+3)+(a^2+1)\} \\ &=(a^2+1)\{a^2+4a+4\} \\ &=(a^2+1)(a+2)^2 \end{aligned} & & 0
\end{array}$$

ということになり，因数分解できるでしょう。