2021年度 東京大学 理系 第4問

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K，L と正の整数 A，B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a，b が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K，L が存在することを示せ。

(3) a，b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

＜ '21 東京大 ＞

【戦略】

(1) **合同式を使えばすっきりと表現できますが，証明問題なので，敢えて合同式を用いずに等式だけで勝負しました。**

(2) $A=\dfrac{L}{K}B$ **という形を目指すことになります。**

すなわち，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\cdots\cdots\cdots=\dfrac{\text{奇数}}{\text{奇数}}\cdot{}_{a}\mathrm{C}_{b}$ **の形が言えればという気持ちです。**

そこで，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ **を書き下していくわけですが，まともに書いていくと目がチカチカします。**

そこで，工夫としては普段

$${}_{7}\mathrm{C}_{3}=\frac{\overrightarrow{7\cdot6\cdot5}}{\underrightarrow{3\cdot2\cdot1}}$$

と「下る方向」で書き下すと思いますが，これを

${}_{7}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\left(=\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{6}{2}\cdot\dfrac{7}{3}\right)$ **のように「昇る方向」で見るのが考えやすいと思います。**

(3) (2) **における** K，L **が** $K\equiv L \pmod 4$ **であることが言えれば (1) の結果から解決をします。**

$$K=\boxed{\{(4b+1)(4b-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1\}}\times\boxed{\{(2b-1)(2b-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1\}}$$

$\mathrm{mod}\,4$ **で合同なので**

$\mathrm{mod}\,4$ **で合同であることが言えれば勝ちです**

$$L=\boxed{\{(4a+1)(4a-1)\cdot\cdots(4a-4b+3)(4a-4b+1)\}}\times\boxed{\{(2a-1)(2a-3)\cdot\cdots\cdot(2a-2b+1)\}}$$

(4) $\begin{cases}2021=4\cdot505+1\\ 37=4\cdot9+1\end{cases}$ **とみれば (3) が使えて数が小さくなっていきます。**

(3) を使えるだけ使って，簡単に考えられる数まで落とし込めれば勝ちです。

【解答】

(1) 以下登場する文字は断りがない限り整数を表すものとする。

条件から K，L を 4 で割った余りは等しいので，それを r とおく。

このとき，$\begin{cases}K=4m_k+r\\ L=4m_\ell+r\end{cases}$ と表せる。

一方，A，B を 4 で割った余りをそれぞれ r_a，r_b とおく。

このとき，$\begin{cases}A=4m_a+r_a\\ B=4n_b+r_b\end{cases}$ と表せる。

$KA=LB$ を満たしているとき，

$$(4m_k+r)(4m_a+r_a)=(4m_\ell+r)(4m_b+r_b)$$

$$\Leftrightarrow\ 4\cdot(4m_km_a+m_kr_a+m_ar)+rr_a=4(4m_\ell m_b+m_\ell r_b+m_br)+rr_b$$

これより，$r(r_a-r_b)=4\cdot(\text{整数})$ という形で表せる。

K，L は奇数なので，r は 1 または 3

右辺が 4 の倍数ゆえ，r_a-r_b が 4 の倍数となるしかない。

$r_a=0,1,2,3$，$r_b=0,1,2,3$ なので，$-3<r_a-r_b<3$

これを満たす 4 の倍数は 0 しかないため，$r_a-r_b=0$

ゆえに，$r_a=r_b$ となり，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい。

(2)

$$ {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\frac{4a-4b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+b}{b} \quad 4a-3b$$

$$\times\frac{4a-3b+1}{b+1}\cdot\frac{4a-3b+2}{b+2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-3b+b}{b+b} \quad 4a-2b$$

$$\times\frac{4a-2b+1}{2b+1}\cdot\frac{4a-2b+2}{2b+2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-2b+b}{2b+b} \quad 4a-b$$

$$\times\frac{4a-b+1}{3b+1}\cdot\frac{4a-b+2}{3b+2}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-b+b}{3b+b} \quad 4a$$

$$\times\frac{4a+1}{4b+1}$$

b 個ずつ区切っていくと整理しやすいです。

これを，

$$\begin{cases}\text{分母，分子が奇数(4で割って1または3余る)となっている分数}\\ \text{分母，分子が4で割って2余る数となっている分数}\\ \text{分母，分子が4の倍数となっている分数}\end{cases}$$

に分けて考えると

$$ {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\left(\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}\right)$$

$$\times\left(\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-6}{4b-6}\cdot\frac{4a-10}{4b-10}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+2}{2}\right)$$

$$\times\left(\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-8}{4b-8}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}\right)$$

ここで

$$\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}=\frac{(\text{奇数})}{(\text{奇数})}$$

$$\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-6}{4b-6}\cdot\frac{4a-10}{4b-10}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+2}{2}$$

$$=\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{2a-3}{2b-3}\cdot\frac{2a-5}{2b-5}\cdot\cdots\cdot\frac{2a-2b+1}{1}=\frac{(\text{奇数})}{(\text{奇数})}$$

$$\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-8}{4b-8}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}$$

$$={}_a\mathrm{C}_b$$

以上から，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\dfrac{L}{K}\cdot{}_a\mathrm{C}_b$ (K，L は奇数) と表せる。

これは，$KA=LB$ と表せるような 奇数 K，L が存在することを意味するので，題意は示された。

(3) 以下合同式における法は 4 であるとする。

(1) の主張は 正の奇数 K，L，正の整数 A，B に対して

$\begin{cases}KA=LB\\ K\equiv L \pmod 4\end{cases}$ であるならば，$A\equiv B \pmod 4$

よって，(2) における K，L が $K\equiv L \pmod 4$ を満たしていることが示されれば (1) の結果により，題意が示されることになる。…(*)

(2) の K，L は

$$K=\underbrace{\boxed{\{(4b+1)(4b-1)\cdots\cdot 3\cdot 1\}}}_{M_b}\times\underbrace{\boxed{\{(2b-1)(2b-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1\}}}_{N_b}$$

$$L=\underbrace{\boxed{\{(4a+1)(4a-1)\cdots(4a-4b+3)(4a-4b+1)\}}}_{M_a}\times\underbrace{\boxed{\{(2a-1)(2a-3)\cdot\cdots\cdot(2a-2b+1)\}}}_{N_a}$$

M_b とおきます。 **N_b とおきます。** **M_a とおきます。** **N_a とおきます。**

$M_b=(4b+1)(4b-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$，
$M_a=\{(4a+1)(4a-1)\cdots(4a-4b+3)(4a-4b+1)\}$
$N_b=(2b-1)(2b-3)\cdots 3\cdot 1$
$N_a=(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)$

とおく。

まず，$M_a\equiv 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\cdots\cdot(-4b+3)(-4b+1)$

$$M_b=(4b+1)(4b-1)\cdots\cdots\{4b+(-4b+3)\}\{4b+(-4b+1)\}$$
$$\equiv 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\cdots\cdot(-4b+3)(-4b+1)$$

ゆえに，$M_a\equiv M_b$ …①

一方，条件から $a-b=2c$ と表せるため $a=2c+b$

ゆえに，$N_a=(4c+2b-1)(4c+2b-3)\cdots(4c+3)(4c+1)$

$$\equiv(2b-1)(2b-3)\cdots 3\cdot 1\ (=N_b)$$

これより，$N_b\equiv N_a$ … ②

①，② より，$M_bN_b\equiv M_aN_a$，すなわち $K\equiv L$ が示された。

(*) を考えると，題意は示された。

(4) $\begin{cases}2021=4\cdot 505+1\\ 37=4\cdot 9+1\end{cases}$ $(505-9=496\ (=\text{偶数}))$であるため，

(3) の結果を用いると

$$ {}_{2021}\mathrm{C}_{37}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9 \ \cdots ③$$

さらに $\begin{cases}505=4\cdot 126+1\\ 9=4\cdot 2+1\end{cases}$ $(126-2=124\ (=\text{偶数}))$ であるため，

再び (3) の結果を用いて

$$ {}_{509}\mathrm{C}_9\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2 \ \cdots ④$$

③，④ より，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2\left(=\dfrac{126\cdot 125}{2\cdot 1}=63\cdot 125\right)$

$63=4\cdot 15+3\equiv 3$，$125=4\cdot 31+1\equiv 1$ であり，$63\cdot 125\equiv 3\cdot 1=3$

以上から，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}\equiv 3$ を得るため，求める余りは 3 …答

【総括】

東大お得意の二項係数に関する整数問題です。

2018 年度，2015 年度，2009 年度，1999 年度 などで出題歴があります。

とは言え，テイストは色々あります。(2015 年度と 1999 年度はテイストがかなり似ていました。)

本問も「考えて見たくなる」テイストの問題だったと思います。

振り返ってみると，(2) あたりから目がチカチカして見えるものが見えなくなりそうです。

二項係数を書き下す際には少しでも工夫をして，頭を整理しやすい形で書き下したいですね。
（試験場ではそんな余裕はないでしょうけど。）

東大のオチって，誘導をそのまま使うというよりも「ひと手間加えて使う」ことが多々あるのですが，今回は誘導をストレートに使えば沈んでくれました。

なので，(4) については 試験場であれば (2)，(3) が出来なかったとしてもその結果を拝借して確保はしておきたいですね。