関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 A$(1,\ f(1))$ における C の接線を

$$\ell:\ y=g(x)$$

とする。

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

を計算せよ。

< '21 東京大 >

【戦略】

(1) **$y=f(x)$ が表すグラフとは 「この ＝ 満たす点 $(x,\ y)$ 集まれ〜」**
$y=g(x)$ が表すグラフとは 「この ＝ 満たす点 $(x,\ y)$ 集まれ〜」

「交点集まれ〜」とは 「どっちも満たす点 $(x,\ y)$ 集まれ〜」

ですから，「どっちも満たす」ということで連立方程式を解きにいきます。

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立して y を消去した x の方程式を解けば，交点の x 座標が出てきます。

その際ですが，連立して y を消した形 $f(x)=g(x)$ からスタートして，それを整理していくと

$$x^3+x^2-5x+3=0$$

という 3 次方程式が得られますが，これについては

元々が $f(x)=g(x)$ を満たすもの集まれという方程式ですから

この中に $x=1$ が紛れ込むのは当然です。

しかも接しているのですから $(x-1)^2(\qquad)=0$ という形になることは最初から分かっています。

これを利用して手際よく因数分解しましょう。

(2) **数学 II の微積分であれば，接線と曲線の囲む面積について工夫の余地があります。(俗に $\dfrac{1}{12}$ 公式などと呼ばれています。)**

今回は何かあると思いたいところですが，分数関数についてなのでパッと何かが見えるわけではないでしょう。(ましてや試験場なら)

下手に上手いことやろうとして時間を使うぐらいであれば落ち着いてゴリゴリ計算を進めたいと思います。

$\{f(x)-g(x)\}^2$ をバラしていくと，「これはできる」という積分の形が次々と現れます。

今回は $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおく形，$\dfrac{f'}{f}$ の形 が主だったところです。

【解答】

(1) $$f'(x)=\frac{x^2+3-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

$f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$ より，ℓ の方程式は $y=\dfrac{1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{4}$

これを整理すれば，$g(x)=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}$

$y=f(x)$，$y=g(x)$ を連立して y を消去すれば

$\dfrac{x}{x^2+3}=\dfrac{x+1}{8}$ でこれを整理すると $x^3+x^2-5x+3=0$

これは $(x-1)^2(x+3)=0$ と変形でき，$x=1,\ -3$ を得る。

$x=-1$ は A の x 座標を与えるので，A と異なる共有点の x 座標は

$$x=-3 \cdots 答$$

であり，C，ℓ の共有点のうち，A と異なる点は $\left(-3,\ -\dfrac{1}{4}\right)$ というただ 1 つである。

(2)
$$\begin{aligned}
\{f(x)-g(x)\}^2&=\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2\\
&=\frac{x^2}{(x^2+3)^2}-\frac{x(x+1)}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\
&=\frac{x^2+3-3}{(x^2+3)^2}-\frac{x(x+1)}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\
&=\frac{1}{x^2+3}-\frac{3}{(x^2+3)^2}-\frac{x(x+1)}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\
&=\frac{-3}{(x^2+3)^2}+\frac{-x^2-x+4}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\
&=\frac{-3}{(x^2+3)^2}+\frac{-(x^2+3)-x+7}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\
&=\frac{-3}{(x^2+3)^2}-\frac{1}{4}+\frac{7-x}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2
\end{aligned}$$

$I_1=\int_{-3}^{1}\frac{-3}{(x^2+3)^2}\,dx$, $I_2=\int_{-3}^{1}\frac{7-x}{4(x^2+3)}\,dx$, $I_3=\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{64}(x+1)^2-\frac{1}{4}\right)dx$

とおく。

＜ I_1 について＞

$x=\sqrt{3}\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$,

x	$-3\ \ \to\ \ 1$
θ	$-\frac{\pi}{3}\ \ \to\ \ \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}I_1&=-3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\{3(1+\tan^2\theta)\}^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=-3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^4\theta}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=-\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta\\&=-\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta\\&=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

＜ I_2 について＞

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{7-x}{x^2+3}\,dx\\&=\frac{1}{4}\left\{\int_{-3}^{1}\frac{7}{x^2+3}\,dx-\int_{-3}^{1}\frac{x}{x^2+3}\,dx\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{7}{3(1+\tan^2\theta)}\ \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta-\frac{1}{2}\int_{-3}^{1}\frac{2x}{x^2+3}\,dx\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{7\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta-\frac{1}{2}\int_{-3}^{1}\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+3)\Big]_{-3}^{1}\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}(\log4-\log12)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}\right\}\\&=\frac{7\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{8}\log3\end{aligned}$$

＜ I_3 について＞

$$I_3=\frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-3}^{1}-\frac{1}{4}\Big[x\Big]_{-3}^{1}=-\frac{11}{12}$$

よって，$\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx=I_1+I_2+I_3$

$$\begin{aligned}&=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}+\frac{7\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{8}\log3-\frac{11}{12}\\&=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{8}\log3-\frac{7}{6}\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

第１問同様 (1) は落とせません。

(2) は上手いことをやろうとして突き進むか引き返すかを迷った人も多いと思います。

落ち着いて愚直に計算した方が安全でしょう。