複素数 $a$，$b$，$c$ に対して，整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。
$i$ を虚数単位とする。

(1) $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を複素数とする。$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ が成り立つとき，$a$，$b$，$c$ をそれぞれ $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ で表せ。

(2) $f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

＜ '21 東京大 ＞

**【戦略】**

(1) $\begin{cases} f(0)=c=\alpha \\ f(1)=a+b+c=\beta \\ f(i)=-a+bi+c=\gamma \end{cases}$

**$a$，$b$，$c$ という 3 つの未知数に対して，条件が 3 つありますから困ることはないでしょう。**

**計算ミスに気を付けて導出しましょう。**

(2) $f(2)=4a+2b+c$ **で，(1) の結果を代入すると**

$$f(2)=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma$$

**という結果を得ます。**

**$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ が実数として，$1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$，$1\leqq\gamma\leqq2$ の範囲を独立に動くわけです。**

**$f(2)=x+yi$ とすれば，$xy$ 平面の話になり，複素数に相当するものはベクトルですから**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ かつ } \begin{cases} 1\leqq\alpha\leqq2 \\ 1\leqq\beta\leqq2 \\ 1\leqq\gamma\leqq2 \end{cases}$$

**として，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ がうごいたときの $(x,\ y)$ の存在範囲と考えればよいでしょう。**

**まずは一旦 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる $(x',\ y')$ の存在範囲を出して，その後，各 $(x',\ y')$ を $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に平行移動させるというように，1 つずつ処理していきましょう。**

【解答】

(1) $f(0)=c=\alpha$ …①

$f(1)=a+b+c=\beta$ …②

$f(i)=-a+bi+c=\gamma$ … ③

① を ②，③ に代入して整理すると $\begin{cases} a+b=\beta-\alpha \\ -a+bi=\gamma-\alpha \end{cases}$

辺々加えると $(1+i)b=-2\alpha+\beta+\gamma$

$$\begin{aligned} b&=\frac{-2\alpha+\beta+\gamma}{1+i} \\ &=\frac{-2(1-i)\alpha+(1-i)\beta+(1-i)\gamma}{(1+i)(1-i)} \\ &=-(1-i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma \end{aligned}$$

このとき，$a=-b-\alpha+\beta$

$$\begin{aligned} &=(1-i)\alpha-\frac{1-i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma-\alpha+\beta \\ &=-i\alpha+\frac{1-i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma \end{aligned}$$

以上から，$\begin{cases} a=-i\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta-\dfrac{1-i}{2}\gamma \\ b=-(1-i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma \\ c=\alpha \end{cases}$ … 答

(2) $f(2)=4a+2b+c$

(1) の結果を代入すると

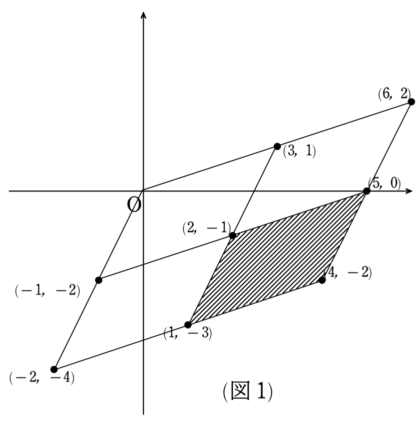
$$f(2)=4\left\{-i\alpha+\frac{1-i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma\right\}+2\left\{-(1-i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right\}+\alpha$$

$$=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma$$

$z=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta$ とおく。

条件 $1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$ より

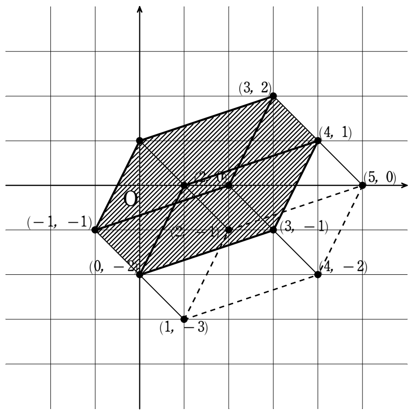
$z$ の存在範囲は次の (図 1) の斜線部




(図 1)

$f(2)=z+\gamma(-1+i)$ なので，(図 1) の斜線部分の各点を $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 方向に平行移動させることになる。

倍率 $\gamma$ は条件から $1\leqq\gamma\leqq2$ なので求める $f(2)$ の存在領域は以下の (図 2) のようになる。




(図 2)

【総括】

すこし疑心暗鬼になる計算でした。
試験場だと猶更でしょう。

聞かれ方に戸惑ったかもしれません。

$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ が実数ということで $\begin{cases}\alpha=\overline{\alpha}\\ \beta=\overline{\beta}\\ \gamma=\overline{\gamma}\end{cases}$ ということに拘って身動きがとれなくなった人も一定数いると思われます。

なお，【戦略】で述べた

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ \text{かつ}\ \begin{cases}1\leqq\alpha\leqq2\\1\leqq\beta\leqq2\\1\leqq\gamma\leqq2\end{cases}$$

として，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ がうごいたときの $(x,\ y)$ の存在範囲

の考え方ですが，私は

UFO キャッチャー

と指導しています。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ としたとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ ですが，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を

「$a$ ボタン，$b$ ボタン，$c$ ボタン」

と呼びます。

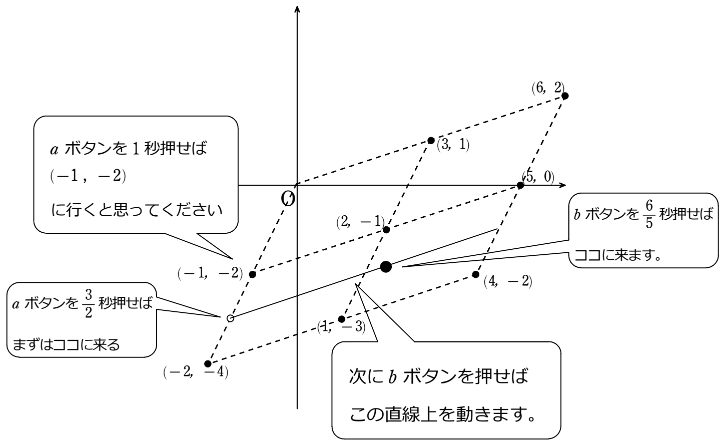
この「$a$ ボタン，$b$ ボタン，$c$ ボタン」の UFO キャッチャーがあると思ってください。

（本当は 2 次元であれば 2 つのボタンで十分なのですが，とりあえず今は細かいことは抜きにしてください。）

そして，この $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ をそれぞれのボタンを押す「秒数」だと思ってください。

まず，$a$ ボタン，$b$ ボタンだけを押します。

例えば，$a$ ボタンを $\dfrac{3}{2}$ 秒，$b$ ボタンを $\dfrac{6}{5}$ 秒押せば




といった感じです。

単元学習における練習問題はここで終わり的なことが多いのですが，
本問はさらに $c$ ボタンを押すという作業が加わっていたというわけです。