a，b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C:\ y=x^2+ax+b$$

は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

＜ '21 東京大 ＞

【戦略】

(1)　**典型的な 2 次方程式の解の配置問題です。**

「こうなっててくれ〜」という願いを込めて図を描き，その願いが叶うための条件を立式します。

(2)　**「通過領域」という重要トピックスです。**

a，b の動きに伴って動く放物線 C の動きを目で追っていくことは非常に難しいです。

そこで，逆に題意の通過領域を D としたとき
どんな $(X,\ Y)$ なら D に入っているんだろう？
と考えます。

例えば，$(2,\ 3)$ って D に入ってる？と考えてみます。

$(2,\ 3)$ が D に入っているかどうかというのは
$(2,\ 3)$ を通るように放物線の a，b を仕組めるかどうか
にかかってきます。

つまり，$3=2^2+2a+b$， すなわち $b=-2a-1$ を満たすような $(a,\ b)$ の組をもってくれば，$(2,\ 3)$ を通るように仕組めるわけです。

しかし，今は自由に a，b をもってこれるわけではなく，(1) で得た領域内にある $(a,\ b)$ しかもってこれないわけです。

$b=-2a-1$ を満たしつつ，(1) の領域内にある $(a,\ b)$ ってどんな $(a,\ b)$ でしょうか。

$b=-2a-1$ を満たす点 $(a,\ b)$ 集まれ〜と呼びかけると，集まってくる点たちの集合体は直線として現れます。

この直線が (1) で得た領域と共有点をもっていれば
「両方のハードルをクリアーする $(a,\ b)$」
が得られるため $(2,\ 3)$ を通るように仕組めるという結論になります。

逆に「集まれ〜」と呼びかけて集まってきた点たちの集合 (直線) が (1) の領域と共有点を持たなかったら $(2,\ 3)$ を通るようには仕組めないということになります。

$(1,\ 2)$ を通るように仕組める？$(-7,\ \sqrt{2})$ を通るように仕組める？

についても同じことです。ただ，キリがないので文字の力を借りて

$(X,\ Y)$ を通るように仕組める？ と考えます。

【解答】

(1)　$y=x^2+ax+b$ と，$y=-x^2$ を連立して y を消去すると

$$x^2+ax+b=-x^2$$

これを整理すると $2x^2+ax+b=0$

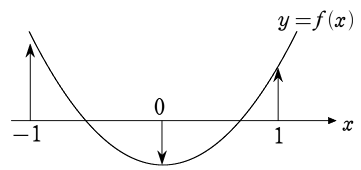
この 2 次方程式の解が $y=x^2+ax+b$，$y=-x^2$ の共有点の x 座標を表すので，この 2 次方程式が

$-1<x<0$ の範囲に 1 つ，$0<x<1$ の範囲に 1 つ

実数解をもつための条件を求める。

$f(x)=2x^2+ax+b$ とおくと

$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$$

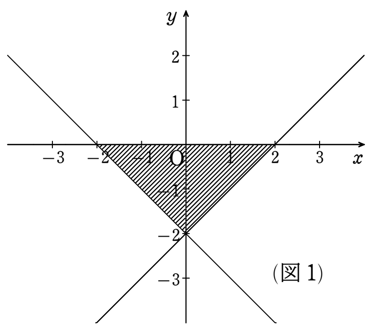


となればよい。

注意：$f(0)<0$ が確定すれば，$y=f(x)$ は下に凸の放物線なので異なる 2 実数解をもち，判別式は不要。

これより $\begin{cases} 2-a+b>0 \\ b<0 \\ 2+a+b>0 \end{cases}$ で，整理すると $\begin{cases} b>a-2 \\ b<0 \\ b>-a-2 \end{cases}$

これを満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲は (図 1) のようになる。
(ただし，境界線は含まない)



(図 1)

(2) 題意の放物線の通過領域内の点からなる点集合を D と呼ぶ。

点 (X, Y) が D に含まれるとは

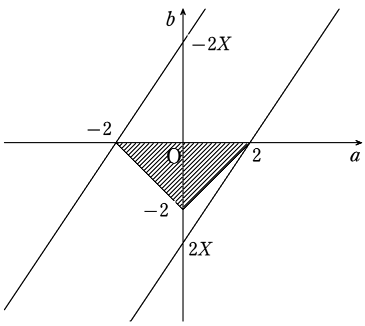
放物線 $y=x^2+ax+b$ が (X, Y) を通るように a, b をとれる

すなわち

$Y=X^2+aX+b$ となるような a, b に対して，(a, b) が (図 1) に含まれる。

よって，$b=(-X)a-X^2+Y$ を満たす点 (a, b) の集合 (直線) が (図 1) と共有点をもつような X, Y の条件を求めればよい。

(i) $-X \geqq 1$，すなわち $X \leqq -1$ のとき

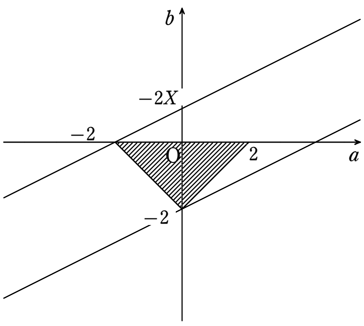


直線 $b=(-X)a-X^2+Y$ が

$$\begin{cases} (-2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } -2X \\ (2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } 2X \end{cases}$$

よって，$2X<-X^2+Y<-2X$ となればよい。

(ii) $0 \leqq -X \leqq 1$，すなわち $-1 \leqq X \leqq 0$ のとき

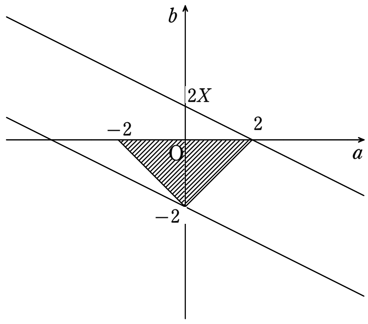


直線 $b=(-X)a-X^2+Y$ が

$$\begin{cases} (-2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } -2X \\ (0, -2) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } -2 \end{cases}$$

よって，$-2<-X^2+Y<-2X$ となればよい。

(iii) $-1 \leqq -X \leqq 0$，すなわち $0 \leqq X \leqq 1$ のとき

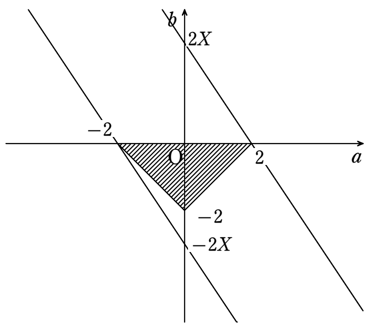


直線 $b=(-X)a-X^2+Y$ が

$$\begin{cases} (2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } 2X \\ (0, -2) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } -2 \end{cases}$$

よって，$-2<-X^2+Y<2X$ となればよい。

(iv) $-X<-1$，すなわち $X>1$ のとき



直線 $b=(-X)a-X^2+Y$ が

$$\begin{cases} (-2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } -2X \\ (2, 0) \text{ を通るときの } b \text{ 切片は } 2X \end{cases}$$

よって，$-2X<-X^2+Y<2X$ となればよい。

まとめると

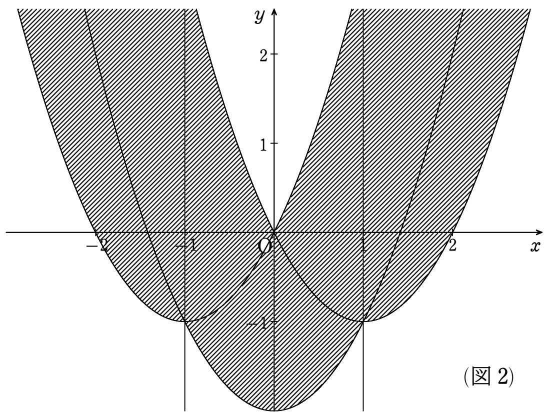
$$\begin{cases} X \leqq -1 \text{ のとき } 2X<-X^2+Y<-2X \\ -1 \leqq X \leqq 0 \text{ のとき } -2<-X^2+Y<-2X \\ 0 \leqq X \leqq 1 \text{ のとき } -2<-X^2+Y<2X \\ X \geqq 1 \text{ のとき } -2X<-X^2+Y<2X \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} X \leqq -1 \text{ のとき} & X^2+2X<Y<X^2-2X \\ -1 \leqq X \leqq 0 \text{ のとき} & X^2-2<Y<X^2-2X \\ 0 \leqq X \leqq 1 \text{ のとき} & X^2-2<Y<X^2+2X \\ X \geqq 1 \text{ のとき} & X^2-2X<Y<X^2+2X \end{cases}$$

これを図示すると，以下の (図 2) のようになる。

（ただし，境界線を含まない）



(図 2)

【総括】

(1) は東大受験生であれば落とせません。

(2) の【戦略】で述べた考え方による導出方法を「逆像法」と言います。

これについては差が付くでしょう。

ちなみに通過領域の問題は東大では頻出で，

2018 年度 第 3 問（放物線の平行移動による通過領域）
2017 年度 第 6 問（円錐の回転体（母線の通過領域））
2016 年度 第 6 問（コンコイド（ある条件を満たす線分 AB の通過領域））
2015 年度　第 1 問（放物線の通過領域（1 パラメータ））
2014 年度　第 6 問（線分の通過領域）
2010 年度　第 1 問（直方体を回転させたときの通過領域）

など，出題歴を遡っていくとキリがありません。

「もろ通過領域」という出題もあれば，「通過領域をもとにつくったものについて考察させる」という出題もあり，何かしら通過領域を絡めて出題する傾向にあります。

過去問にしっかりと取り組んでいれば，本問はご祝儀的な問題です。