$\dfrac{1}{n}$ 乗の対数の極限

次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=n+1}^{2n}\log k-n\log n\right\}=\int_1^2\log x\,dx$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

＜ ’91 北海道大 ’12 横浜国立大 ＞

【戦略】

(1) は極限をとる前の式を書き下すと

$$\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(n+n)-n\log n\}$$
$$=\frac{1}{n}\{(\log(n+1)-\log n)+(\log(n+1)-\log n)+\cdots+(\log(n+n)-\log n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\{\log k-\log n\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$$

となります。

これはきちんと区分求積法を勉強していればパッと $\displaystyle\int_1^2\log x\,dx$ **と見えますが，証明問題なので，面積を考えて丁寧に記述します。**

(2) は $\dfrac{1}{n}$ **乗を何とかしたいという思いから，** $\log$ **をとって考えます。**
(1) で示した形にも $\log$ **が含まれており，追い風となるでしょう。**

名前をつけて $P_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ **とおきます。**

$$\log P_n=\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n!n^n}$$
$$=\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$$
$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+n}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$$

となり，(1) の結果から，

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\int_1^2\log x\,dx$$
$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^2$$
$$=2\log 2-1$$
$$=\log 4-\log e$$
$$=\log\frac{4}{e}$$

となります。

$\log x$ **は連続関数なので，** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{e}$ **を得ます。**

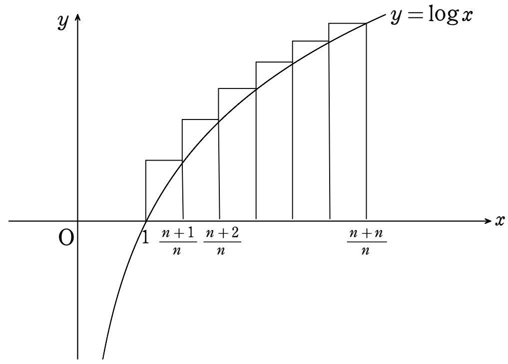
$\log x$ **の連続性については一言断っておきましょう。**

【解答】

(1) $\displaystyle\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=n+1}^{2n}\log k-n\log n\right\}$

$$=\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(n+n)-n\log n\}$$
$$=\frac{1}{n}\{(\log(n+1)-\log n)+(\log(n+1)-\log n)+\cdots+(\log(n+n)-\log n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\{\log k-\log n\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$$

ここで，$y=\log x$ のグラフにおいて



$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$ は図の長方形の面積の和を表しており

$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\longrightarrow\int_1^2\log x\,dx$ となる。

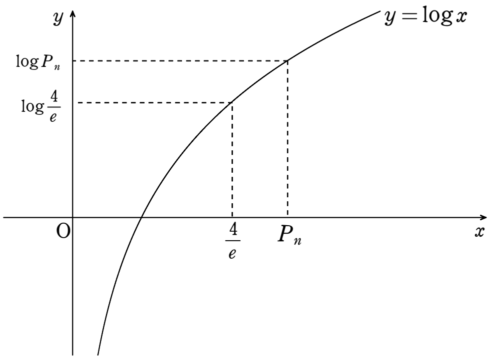
以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=n+1}^{2n}\log k-n\log n\right\}=\int_1^2\log x\,dx$ が成立する。

(2) $P_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$$\log P_n=\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n!n^n}$$
$$=\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$$
$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+n}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$$

(1) より，

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\int_1^2\log x\,dx$$
$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^2$$
$$=2\log 2-1$$
$$=\log 4-\log e$$
$$=\log\frac{4}{e}$$



$n\to\infty$ のとき，$\log P_n \to \log\dfrac{4}{e}$

$y=\log x$ は連続関数であるため，このとき $P_n \to \dfrac{4}{e}$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n\,!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e} \cdots 答$$

【総括】

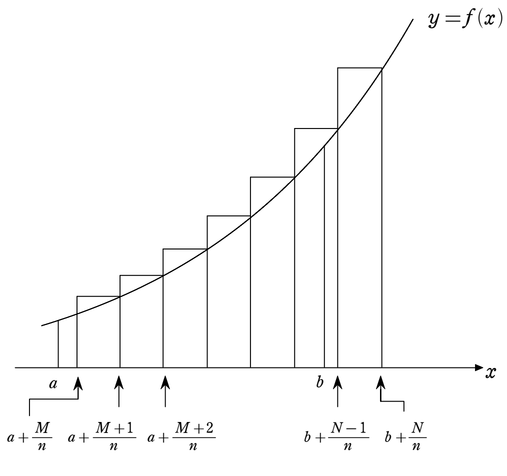
教科書にある

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

という公式は積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で考えた区分求積法の式ですが，一般には

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=an+M}^{bn+N} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となります。積分区間は $\sum$ 区間の n の係数とリンクします。



$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=an+M}^{bn+N} f\left(\frac{k}{n}\right)$ は上の長方形の面積の和を表します。

$n\to\infty$ のとき，$a+\dfrac{M}{n}\to a$， $b+\dfrac{N}{n}\to b$ であることも考えると

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=an+M}^{bn+N} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$ が成立することは直感的には分かると思います。

【復習用問題】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

＜ '88 東工大 ＞

【戦略】

対数をとって，ほぐしていけば区分求積法の形が現れます。

類題の経験があればスムーズにいくでしょうが，初見だと問題文の短さゆえ手掛かりが少なく，試行錯誤することになる可能性が大きいでしょう。

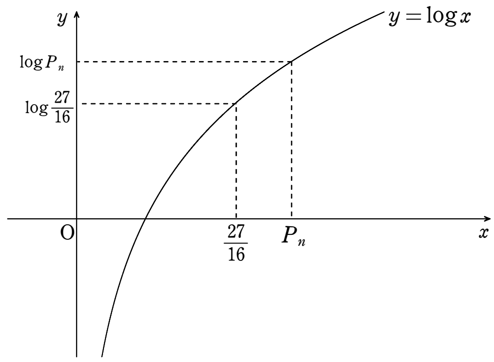
【解答】

$P_n = \left(\dfrac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$$\begin{aligned}
\log P_n &= \frac{1}{n}\log\frac{\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{n\,!}}{\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n\,!}} \\
&= \frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{2n+1}{n+1}+\log\frac{2n+2}{n+2}+\cdots\cdots+\log\frac{2n+n}{n+n}\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \log X\,dX$
$= X\log X - X + C$
（C **は積分定数**）

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log P_n &= \int_0^1 \log\frac{2+x}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1\{\log(2+x)-\log(1+x)\}\,dx \\
&= \Big[(2+x)\log(2+x)-(2+x)\Big]_0^1 - \Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1 \\
&= \Big[(2+x)\log(2+x)-x\Big]_0^1 - \Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1 \\
&= (3\log 3-1)-(2\log 2)-\{(2\log 2-1)-(1\log 1-0)\} \\
&= 3\log 3 - 4\log 2 \\
&= \log\frac{27}{16}
\end{aligned}$$



$n\to\infty$ のとき，$\log P_n \to \log\dfrac{27}{16}$

$y=\log x$ は連続関数であるため，このとき $P_n \to \dfrac{27}{16}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{27}{16} \cdots 答$$

【復習用問題 2】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ を求めよ。

＜ '12 防衛医科大 ＞

【戦略】

n 乗根は $\dfrac{1}{n}$ 乗です。 $\log$ をとって区分求積法に持ち込む際は

$$\log(\quad)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\sum\log(\quad)$$

ですから，　の部分が将来の区分求積法のパーツとなります。

したがって，今回の最初についている $\dfrac{1}{n}$ はその意味では邪魔なので，

$\sqrt[n]{\quad}$ の中に入れておきます。

【解答】

$P_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(3n)!}}$ とおく。

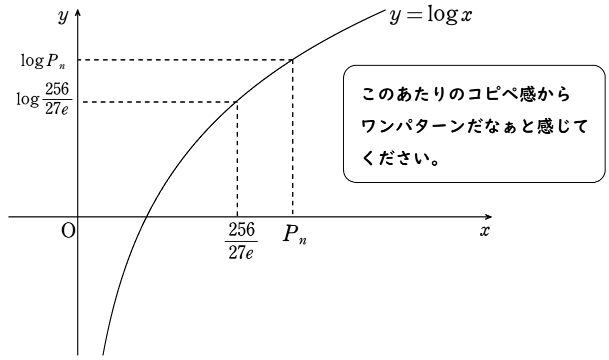
$$\begin{aligned}P_n&=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(3n)(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{(3n)!}}\\&=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\\&=\sqrt[n]{\frac{3n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+n}{n}}\\&=\left(\frac{3n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\log P_n&=\frac{1}{n}\log\left(\frac{3n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+n}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{3n+1}{n}+\log\frac{3n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{3n+n}{n}\right\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{3n+k}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\int_0^1\log(3+x)\,dx$$

$$\begin{aligned}&=\Big[(3+x)\log(3+x)-(3+x)\Big]_0^1\\&=(4\log4-4)-(3\log3-3)\\&=4\log4-3\log3-1\\&=\log\frac{256}{27e}\end{aligned}$$



$n\to\infty$ のとき，$\log P_n\to\log\dfrac{256}{27e}$

$y=\log x$ は連続関数であるため，このとき $P_n\to\dfrac{256}{27e}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}\\&=\frac{256}{27e}\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【復習用問題 3】

任意の自然数 n に対して $P_n=\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{P_n}$ を求めよ。

＜ '89 千葉大 ＞

【戦略】

(1) **「もうくどい，おなか一杯」という感想がもてていれば大丈夫でしょう。**

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ **という e の定義がイレギュラーを起こした**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=e^2$ **を利用します。**

逆数

【略解】

$Q_n=\dfrac{1}{n}P_n$ とおくと，$Q_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)}$

$$=\sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{2n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+n}{n}}$$

$$\begin{aligned}\log Q_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\log Q_n=\int_0^1\log(2+x)\,dx$$

$$=\Big[(2+x)\log(2+x)-(2+x)\Big]_0^1=3\log3-3-(2\log2-2)=\log\frac{27}{4e}$$

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}=\frac{27}{4e}\cdots\text{答}$$

(2) $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}^{\frac{P_n}{n}}=(e^2)^{\frac{27}{4e}}=e^{\frac{27}{2e}}\cdots\text{答}$