円卓の周りに並べられた $n$ 席の座席に $m$ 人の人が座るとき，どの二人も隣り合わない確率を $P(n\ ,\ m)$ とする。ただし，$2\leqq m\leqq \dfrac{n}{2}$ とし，どの空席も同じ確率で選ぶものとする。

(1)　$P(n\ ,\ 2)$ を $n$ を用いて表せ。

(2)　$P(n\ ,\ m)$ を $n\ ,\ m$ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} P(m^2,\ m)$ を求めよ。

＜ '11 滋賀医科大 ＞

**【戦略】**

(1)　**たかが 2 人なので，1 人ずつ座らせていきます。**

**1 人目はどこに座っても構いません。**

**2 人目は 1 人目の両隣を除く $n-3$ 通りの選択肢があります。**

(2)　**(1) 同様 1 人目を固定して考えます。**

**隣り合わないものに関しては「隙間に放り込む」のが常套手段です。**

**そこで先に空席を並べて，その間に人を放り込むことを考えます。**

**そうなると残りの $n-1$ 席の内訳を考えることになります。**

**$m-1$ 席は人が座るので，空席は $n-1-(m-1)=n-m$ 席ということになり，あとは $n-m-1$ カ所の隙間から $m-1$ カ所選んで放り込めばよいことになります。**

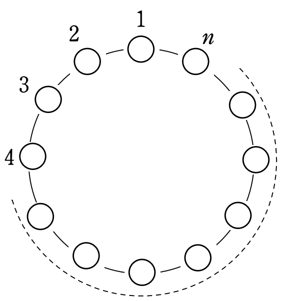
(3)　**(2) で得た結論に $n=m^2$ を代入します。**

**階乗に関する約分を処理すると $1^\infty$ タイプの不定形が現れますから $e$ の定義を疑うことになるでしょう。**

**直接計算ではなく，評価をしてからはさみうちの原理で仕留めます。**

【解答】

(1)　1 人目はどこに座ってもよい




1 人目が座った席を 1 と呼び
そこから反時計回りに
2，3，……，$n$ とする。

2 人目は残り $n-1$ 席のうち
2，$n$ の席を除く $n-3$ 席から
選んで座ればよく

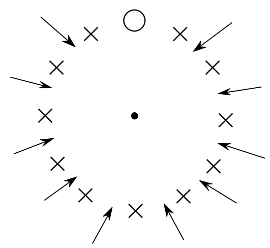
$$P(n\ ,\ 2)=\frac{n-3}{n-1}\ \cdots 答$$

(2)　(1) 同様に 1 人目が座った席を 1 と呼び，そこから反時計回りに
2，3，……，$n$ とする。

残った $n-1$ 席の内訳は

$$\begin{cases} n-m \text{ 席は人が座らない席（ × と表す）} \\ m-1 \text{ 席は人が座る席（△ と表す）} \end{cases}$$

2 人目から $m$ 人目の座る場所の
選び方は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}$ 通り。



このうちどの 2 人も隣り合わない
ような席の決め方を考える。

まず× を並べる。

右の図の ↑（$n-m-1$ カ所）から
$m-1$ カ所選んで △を入れればよい。

よって，どの 2 人も隣り合わない場所の選び方は ${}_{n-m-1}\mathrm{C}_{m-1}$ 通り

ゆえに

$$P(n\ ,\ m)=\frac{{}_{n-m-1}\mathrm{C}_{m-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}}$$

$$=\frac{\dfrac{(n-m-1)!}{(m-1)!\,(n-2m)!}}{\dfrac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}}$$

$$=\frac{(n-m)!\,(n-m-1)!}{(n-1)!\,(n-2m)!}\ \cdots 答$$

(3)　$P(m^2,\ m)=\dfrac{(m^2-m)!\,(m^2-m-1)!}{(m^2-1)!\,(m^2-2m)!}$

$(m^2-1)!=(m^2-1)(m^2-2)\cdots\{m^2-(m-1)\}(m^2-m)!$

よって　$\dfrac{(m^2-m)!}{(m^2-1)!}=\dfrac{1}{(m^2-1)(m^2-2)\cdots(m^2-m+1)}$

$(m^2-m-1)!$
$\quad=(m^2-m-1)(m^2-m-2)\cdots\{m^2-m-(m-1)\}(m^2-2m)!$

よって，$\dfrac{(m^2-m-1)!}{(m^2-2m)!}=(m^2-m-1)(m^2-m-2)\cdots(m^2-2m+1)$

ゆえに，

$$P(m^2,\ m)=\frac{(m^2-m-1)(m^2-m-2)\cdots(m^2-2m+1)}{(m^2-1)(m^2-2)\cdots(m^2-m+1)}$$

$$=\overbrace{\left(1-\frac{m}{m^2-1}\right)\left(1-\frac{m}{m^2-2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m}{m^2-m+1}\right)}^{m-1\text{ 個}}$$

これより，$\left(1-\dfrac{m}{m^2-m+1}\right)^{m-1}<P(m^2,\ m)<\left(1-\dfrac{m}{m^2-1}\right)^{m-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{e}$$

に注意すると

$$(\text{最右辺})=\left\{\left(1-\frac{1}{m-\frac{1}{m}}\right)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{m-1}{m-\frac{1}{m}}}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{e}$$

$$(\text{最左辺})=\left\{\left(1-\frac{1}{m-1+\frac{1}{m}}\right)^{m-1+\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{m-1}{m-1+\frac{1}{m}}}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{e}$$

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{m\to\infty}P(m^2,\ m)=\frac{1}{e}$ …答

【総括】

(2) が意外とクセモノ（？）

隣り合っていけないものは隙間に入れるのが常套手段ですが，言葉にできないやりにくさがありました。（個人差があるとは思いますが）

また，今回は「隣り合うか合わないか」が問題であり，「誰が」ということは考えなくてよかったので，人の区別はしませんでした。

なので，全事象や題意の事象はコンビネーションで数えました。

もちろん，${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ に注意して

$$P(n,\ m)=\frac{{}_{n-m-1}\mathrm{P}_{m-1}}{{}_{n-1}\mathrm{P}_{m-1}}$$

$$=\frac{\dfrac{(n-m-1)!}{(n-2m)!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}}$$

$$=\frac{(n-m)!(n-m-1)!}{(n-1)!\,(n-2m)!}$$

と計算してもよいでしょう。

また，(3) では，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ という定義に対して

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ が常識になっているかどうかが差を生みます。

ただ，それ以前に解答中でサラっとやった評価も差を生む要素かもしれません。