数列 $\{a_n\}$ があって，すべての自然数 n について，初項 a_1 から第 n 項までの和が $\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$ に等しいとする。

(1) a_n がすべて正とする。一般項 a_n を求めよ。

(2) 最初の 100 項のうち，1 つは負で他はすべて正とする。a_{100} を求めよ。

＜ ’96 名古屋大 ＞

【戦略】

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ **とすると，** $S_n=\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$ **という和の条件が与えられているので，和から一般項を出す**

$$a_n=\begin{cases} S_n-S_{n-1} & (n\geqq 2) \\ S_1 & (n=1) \end{cases}$$

を用いてほぐしていくと，

$$(a_{n+1}+a_n)\left(a_{n+1}-a_n-\frac{1}{2}\right)=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

までは一直線でしょう。

つまり，この数列 $\{a_n\}$ **は** $\begin{cases} a_{n+1}=-a_n \\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **のいずれかが成り立つ数列ということになります。**

(1)，(2) **ともに与えられた題意を満たすために ” 漸化式の選択 ” を迫られます。**

(1) **は初項** a_1 **が正なので，符号チェンジである** $a_{n+1}=-a_n$ **を使うことが許されません。**

(2) **は** $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2}$ **を適用すると，増加するので，負の項がただ 1 つ存在するためには符号チェンジの漸化式** $a_{n+1}=-a_n$ **をどこで用いるかが勝負であり，同時に場合分けの肝となります。**

【解答】

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\ \cdots$ ①

$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=\left(a_{n+1}+\dfrac{1}{4}\right)^2\ (n=0,\ 1,\ \cdots)\ \cdots$ ②

②−① より，

$$a_{n+1}=\left(a_{n+1}+\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(a_{n+1}-\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\Leftrightarrow\quad (a_{n+1}+a_n)\left(a_{n+1}-a_n-\frac{1}{2}\right)=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\quad \cdots(*)$$

条件 $a_n>0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ より，$a_{n+1}-a_n-\dfrac{1}{2}=0$，

すなわち

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}$$

が $n=1,\ 2,\ \cdots$ で成立する。

また，$a_1=\left(a_1+\dfrac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=0$ であり，$a_1=\dfrac{1}{4}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列なので

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(n-1) \\ &=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\ \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ より，$\begin{cases} a_{n+1}=-a_n & \cdots ③ \\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2} & \cdots ④ \end{cases}$

$a_1=\dfrac{1}{4}\ (>0)$ より，条件を満たすとき，負の項は a_2 ～ a_{100} のどれかである。

$a_k<0\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ 100)$ とする。

(i) $k=2$ のとき，すなわち $a_2<0$ のとき

$a_1>0$ より，$n=1$ については ③ が適用され，

$$\begin{aligned} a_2&=-a_1 \\ &=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

a_3 以降は正なので，$n=2$ については ③ が適用され，

$$\begin{aligned} a_3&=-a_2 \\ &=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

注：④ を適用しても $a_3=\dfrac{1}{4}$ **となります。**

$n=3,\ 4,\ \cdots,\ 99$ については ④ が適用される。

ここで，$a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{100}$ という 98 個の数列は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列なので

$$\begin{aligned} a_{100}&=a_3+\frac{1}{2}(98-1) \\ &=\frac{195}{4} \end{aligned}$$

(ii) $k=100$ のとき，すなわち $a_{100}<0$ のとき

a_1 ～ a_{99} は全て正なので，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 98$ までは ④ が適用され，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{99}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列なので，

$$\begin{aligned} a_{99}&=a_1+\frac{1}{2}(99-1) \\ &=\frac{197}{4} \end{aligned}$$

$n=99$ については ③ が適用され，

$$\begin{aligned} a_{100}&=-a_{99} \\ &=-\frac{197}{4} \end{aligned}$$

(iii) $3 \leqq k \leqq 99$ のとき，すなわち $a_3 \sim a_{99}$ のどれかが負のとき

$$\overbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{k-1}}^{\text{正}},\ \overbrace{a_k}^{\text{負}},\ \overbrace{a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots,\ a_{100}}^{\text{正}}$$

$n=1,\ 2,\ \cdots,\ k-2$ までは ④ を適用し

$$\begin{aligned} a_{k-1} &= a_1 + \frac{1}{2}(k-2) \\ &= \frac{1}{2}k - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$n=k-1$ については ③ を適用し，

$$\begin{aligned} a_k &= -a_{k-1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k \end{aligned}$$

$n=k$ については ③ を適用し，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= -a_k \\ &= \frac{1}{2}k - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

注 (i) **のときと違って，④ を適用しても**

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}k\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} - \frac{1}{2}k < 0 \ (\because k \geqq 3) \end{aligned}$$

$n=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 100$ については ④ を適用し，

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_{k+1} + \frac{1}{2}(99-k) \\ &= \left(\frac{1}{2}k - \frac{3}{4}\right) + \frac{99}{2} - \frac{1}{2}k \\ &= \frac{195}{4} \end{aligned}$$

以上より，ただ 1 つある負の項を a_k ($k=2,\ 3,\ \cdots,\ 100$) としたとき，

$$\begin{cases} k=2,\ 3,\ \cdots,\ 99 \text{ のとき } & a_{100} = \dfrac{195}{4} \\ k=100 \text{ のとき } & a_{100} = -\dfrac{197}{4} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

(1) でおぼついているようだと合格が遠のいてしまいます。

(2) で勝負というセットです。

(2) では漸化式が選べるという面白い設定です。

場合分けの必要性を見落とさないようにしたいものです。

場合分けの基準ですが，「④ を使って符号が変化することがあるかどうか」です。

(iii) において ③ を 2 回使いました。この 2 回は符号チェンジだけなので，全て ④ を使い続けた等差数列に比べてゴールの a_{100} は 2 項分遅れています。

つまり，(iii) における a_{100} は (1) の場合の a_{98} に相当すると考えて

$$a_{100} = \frac{1}{2} \cdot 98 - \frac{1}{4} = \frac{195}{4}$$

としてもいいですね。