xyz 空間内に2点 $\mathrm{P}(u\,,\,u\,,\,0)$，$\mathrm{Q}(u\,,\,0\,,\,\sqrt{1-u^2})$ を考える。
u が0から1まで動くとき，線分PQが通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u\,,\,0\,,\,0)$ $(0\leqq u\leqq 1)$ と線分PQの距離を求めよ。
(2) 曲面 S を x 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ。
＜ '03 東北大 ＞

【戦略】

空間座標における回転体を考える際は

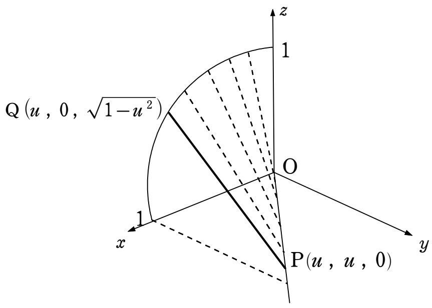
全体像は捨てる
切ってから回す
回転の中心からの最大距離と最小距離を捉える

というのが鉄則です。

今回の曲面 S を把握するために軽く図示してみます。

点Pが xy 平面上の直線 $y=x$ 上
点Qが xz 平面上の円 $x^2+z^2=1$ 上

を動くことに注意して，アニメーション風に書くと



と「長さ1の棒が倒れていく」イメージです。
（$\mathrm{PQ}^2=(u-0)^2+(0-\sqrt{1-u^2})^2=1$ より，$\mathrm{PQ}=1$ であることにも注意）

この棒が倒れていくときの通過領域が S ということになります。

イメージで言うと「ベビースターラーメン」みたいですね。
（最近ありますよね，こういう1本1本が繋がった大きなベビースター）

注意：「想像するなって言ったじゃないか」という人へ
私は回転「後」の全体像を想像するなと言いたいのです。
回転「前」の全体像は把握しなければいけませんよ。

このベビースターラーメン S を $x=u$ で切ったときの切り口が線分PQですから，それを x 軸周りに回転させて断面積を得ます。

そうしてみると(1)で求める距離は

回転の中心 $\mathrm{R}(u\,,\,0\,,\,0)$ からの最小距離

ということになります。

(2)では $\mathrm{R}(u\,,\,0\,,\,0)$ からの最大距離も考えて断面積を求めることになります。

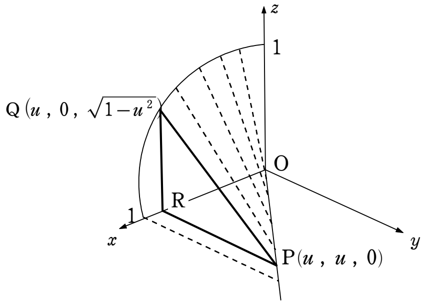
その際，最大距離がRPなのかRQなのかで場合分けが発生することに注意して進めていきましょう。

【解答】

(1) $\mathrm{RP}=u$，$\mathrm{RQ}=\sqrt{1-u^2}$

三平方の定理から $\mathrm{PQ}^2=1$

求めるものを h とすると，
△PQRの面積を考えて



$$\frac{1}{2}\cdot h\cdot \mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\mathrm{RP}\cdot\mathrm{RQ}$$

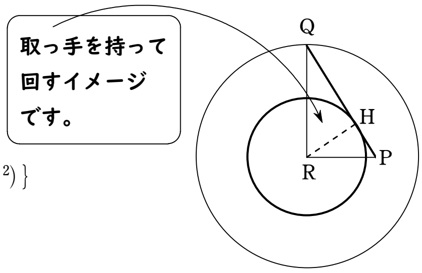
これより，$\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}$

すなわち，$h=u\sqrt{1-u^2}$ …答

(2)（Ⅰ）$\sqrt{1-u^2}\geqq u$，すなわち $0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$x=u$ でこの回転体を切った切り口は円環となる。

その円環の面積 $S_1(u)$ は

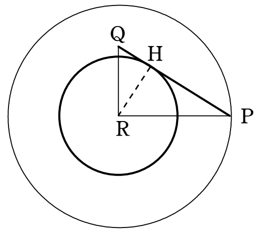


$$\begin{aligned}S_1(u)&=\pi\,\mathrm{RQ}^2-\pi\,\mathrm{RH}^2\\&=\pi(\mathrm{RQ}^2-\mathrm{RH}^2)\\&=\pi\{(1-u^2)-u^2(1-u^2)\}\\&=\pi(1-u^2)^2\end{aligned}$$

（Ⅱ）$\sqrt{1-u^2}\leqq u$，すなわち $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$ のとき

$x=u$ でこの回転体を切った切り口は円環となる

その円環の面積 $S_2(u)$ は



$$\begin{aligned}S_2(u)&=\pi\,\mathrm{RP}^2-\pi\,\mathrm{RH}^2\\&=\pi(\mathrm{RP}^2-\mathrm{RH}^2)\\&=\pi\{u^2-u^2(1-u^2)\}\\&=\pi u^4\end{aligned}$$

（Ⅰ），（Ⅱ）より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}S_1(u)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 S_2(u)\,du\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-2u^2+u^4)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi u^4\,du\\&=\pi\left[u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\\&=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

空間座標における回転体を求めるシナリオについては，難関大学を目指すにあたり必ずマスターしておく必要があります。

この話題における問題では回すものが直線，円錐，三角柱，など馴染み深い図形が多いのですが，本問は少し凝った図形の回転体です。

そういった意味で回転前の図形の把握でスタミナを削られたかもしれません。

線分が倒れて出来る曲面ですから，今回の切り口は当然線分であるという部分さえクリアーすれば，回す切り口自体は線分という非常にシンプルなものですから計算はそこまで膨らむものではありません。

試験場においてはセットにもよるでしょうが，合否を分けるレベルかと思われます。