

確率漸化式【設定の工夫】

【リベンジ用問題】

図1のように2つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。
2点 P, Q が6個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則 (a), (b) に従って移動する。

- (a) 時刻 0 では図2のように点 P は頂点 A に, 点 Q は頂点 C にいる。
- (b) 点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に, 今いる頂点と辺で結ばれる頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。

また, 時刻 n まで 2点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく, かつ時刻 n に 2点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し, $b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を, 図2にならってすべて図示せよ。
- (2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。
- (3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

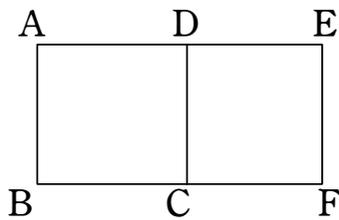


図 1

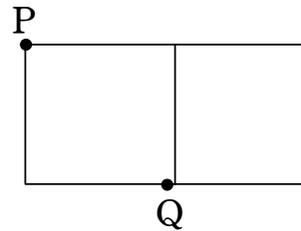


図 2