　投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

　コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たら文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

　たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に，表，裏，裏，表，裏であったとすると ,得られる文字列は

AABBAAB

となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B である確率を求めよ。

＜ ’15 東京大 ＞

【戦略】

同じ A という文字ですが，別物の A と考えることで，スムーズに漸化式が立てられます。

しかし，そこに気づくまでにかなりの時間とエネルギーを費やすことになるでしょう。

【解答】

文字列 AA を書くとき，左側の A を A_L，右側の A を A_R とする。

n 回コインを投げたとき，n 番目の文字は確定している。

n 番目の文字が A_L，A_R，B である確率をそれぞれ ℓ_n，r_n，b_n とする。

$n+1$ 番目の文字が A_L とは

n 番目の文字が A_R かつ その状態で表が出る
または
n 番目の文字が B　かつ　その状態で表が出る

よって，

$$\ell_{n+1}=\frac{1}{2}(r_n+b_n)$$

$n+1$ 番目の文字が A_R とは n 番目の文字が A_L ということであり，

$$r_{n+1}=\ell_n$$

$n+1$ 番目の文字が B とは

n 番目の文字が A_R かつ その状態で裏が出る
または
n 番目の文字が B　かつ　その状態で裏が出る

よって，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(r_n+b_n)$

まとめると，

$$\begin{cases} \ell_{n+1}=\frac{1}{2}(r_n+b_n) & \cdots ① \\ r_{n+1}=\ell_n & \cdots ② \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(r_n+b_n) & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③ より，$\ell_{n+1}=b_{n+1}$，かつ，今 $\ell_1=b_1=\frac{1}{2}$ より

$$\ell_n=b_n \cdots ④$$

また，$n\geqq 2$ のとき，② より，$r_n=\ell_{n-1}$ …⑤

④，⑤ を ① に代入すれば

$$\ell_{n+1}=\frac{1}{2}(\ell_n+\ell_{n-1})$$

数列 $\left\{\ell_{n+1}+\frac{1}{2}\ell_n\right\}$ が
定数列であることを意味します。

これを整理すると

$$\ell_{n+1}+\frac{1}{2}\ell_n=\ell_n+\frac{1}{2}\ell_{n-1}$$

これより，$\ell_{n+1}+\frac{1}{2}\ell_n=\ell_2+\frac{1}{2}\ell_1$

今，① より，$\ell_2=\frac{1}{2}(r_1+b_1)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ であるから

$\ell_{n+1}+\frac{1}{2}\ell_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，すなわち，$\ell_{n+1}=-\frac{1}{2}\ell_n+\frac{1}{2}$ を得る。

これを変形すると

$$\ell_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\ell_n-\frac{1}{3}\right)$$

したがって，

$$\begin{aligned}\ell_n-\frac{1}{3}&=\left(\ell_1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\ell_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

⑤ より，$r_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

これに $n=1$ を代入すると，$r_1=0$ となり，これは $n=1$ でも成立する。

求める確率は ℓ_n+r_n より，

$$\begin{aligned}\ell_n+r_n&=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\}\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \cdots \text{答}\end{aligned}$$

(2)　$n-1$ 番目の文字が A，n 番目の文字が B とは

$n-1$ 番目の文字が $\mathrm{A_R}$ かつ その状態で裏が出る

ということであり，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r_{n-1}&=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\\&=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【戦略 2】(1) について

直前の状況で場合分けをしようとすると，【解答】の方針のように A を区別しないと考えにくくなるわけです。

場合の数，確率漸化式では「最初の一手で場合分け」をする方針も考えられます。

多くの問題では
場合の数漸化式 → 最初の一手で場合分け
確率漸化式　　 → 最後の一手 (直前の状況) で場合分け

という分類が有効なのですが，本問は例外的に最初の一手で場合分けするとスムーズに考えることができます。

閃きというよりは試行錯誤の結果辿り着く解法と言えましょう。

ただし，【解答】 の方針では (1) で苦労した分，その恩恵として (2) がボーナス問題となりましたが，この 【解 2】 の方針では (1) が典型的な 3 項間漸化式となる分，(2) が (1) を活かしづらくなってしまうデメリットがあります。

【解 2】(1) について

コインを十分な回数投げたとき，左から n 番目の文字は確定している。

左から n 番目の文字が A である確率を a_n とする。

a_{n+2} について考える。

(i)　最初に表が出るとき (その確率は $\frac{1}{2}$)

$\mathrm{A\,A}\overbrace{\square\square\cdots\cdots\square\mathrm{A}}^{n\text{ 個}}$　　最初の 2 個の A を除いて，左から n 番目に A があればよい。

その確率は a_n

よって，この場合，左から $n+2$ 番目の文字が A である確率は

$$\frac{1}{2}\times a_n$$

(ii)　最初に裏が出るとき (その確率は $\frac{1}{2}$)

$\mathrm{B}\overbrace{\square\square\cdots\cdots\square\mathrm{A}}^{n+1\text{ 個}}$　　最初の B を除いて左から $n+1$ 番目に A があればよい。

その確率は a_{n+1}

よって，この場合，左から $n+2$ 番目の文字が A である確率は

$$\frac{1}{2}\times a_{n+1}$$

(i)，(ii) から，$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$　($n=1,2,\cdots$) が成立する。

これは $\begin{cases}a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n & \cdots①\\ a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n) & \cdots②\end{cases}$ と 2 通りに変形できる。

また，左から 2 文字目が A となる確率 a_2 は

「1 回目に表が出る」または「1 回目に裏が出て 2 回目に表が出る」

となる確率なので，

$$a_2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

a_1 は「1 回目に表が出る」となる確率なので，$a_1=\frac{1}{2}$

① より，$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=a_2+\frac{1}{2}a_1=1$

② より，
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=(a_2-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad\left(\text{注}:\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\text{ と見た}\right)\end{aligned}$$

まとめると $\begin{cases}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=1 & \cdots③\\ a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \cdots④\end{cases}$

③−④ より，$\frac{3}{2}a_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\text{答}$$

【戦略 3】(2) について

【戦略２】の方針で (1) を処理した場合，(1) の結果を活かしづらくなってしまいました。

$n-1$ 番目の文字が A の確率は a_{n-1} ですが，この A が AA の左側なのか右側なのかを考える必要があるからです。

そこで，直接考えることが難しい確率については余事象を捉えるということを考えてみたいと思います。

n 番目が B となる中には $\begin{cases} n-1\text{ 番目が A} \\ n-1\text{ 番目が B} \end{cases}$

という２ケース考えられますから，n 番目が B となる確率（$1-a_n$）から $n-1$ 番目が B となる確率を除いてしまえば解決です。

【解 3】(2) について

n 番目が B となる確率は $1-a_n$

この場合の中には $\begin{cases} n-1\text{ 番目の文字が A} \\ n-1\text{ 番目の文字が B} \end{cases}$

という場合が含まれており，確率 $1-a_n$ から $n-1$ 番目の文字が B でその直後に裏が出て B が書かれる確率（$(1-a_{n-1})\times\dfrac{1}{2}$）を引けば求める確率となる。

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}(1-a_n)-\left\{(1-a_{n-1})\times\frac{1}{2}\right\}&=\frac{1-2a_n+a_{n-1}}{2}\\&=\frac{1-2a_n+(2-2a_n)}{2}\quad(\because ③)\\&=\frac{3-4a_n}{2}\\&=\frac{3}{2}-2a_n\\&=\frac{3}{2}-2\cdot\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

AA と 2 個書かれると，「コインを投げる回数」と「並ぶ文字の個数」がリンクしなくなります。

このコインを投げる回数と，並ぶ文字の個数との関連について，無駄に固執してしまうと見当違いな方向に向かってしまいます。

とにもかくにも

「左から n 文字目が A となる確率」

に集中できたかどうかは大きな山場でしょう。

大枠としては

【戦略 1】のように n 番目の文字が A_L，A_R，B かを分類する

【戦略 2】のように最初の一手目で場合分けする

という 2 路線が考えられます。

【戦略 1】の方針では (1) が大変ですが，(2) がボーナス問題となりますし，【戦略 2】の方針では (1) はオーソドックスに解けますが，(2) が (1) を活かしづらい方針となってしまいます。

「あちらを立てればこちらが立たず」とはまさにこのことで，その点ではよく練られているなぁと感じずにはいられません。

いずれにせよ，どこかで困難を解決するアイデアが必要な問題であり，「もっと楽にならないか」などと策に拘り過ぎると無駄に時間ばかりが過ぎてしまいます。

困難にぶち当たった場合，うまく解決するための工夫を探す態度はもちろん大切です。

しかし，地道にいっても解決できそうであった場合，それが多少茨の道に見えたとしても，割り切って処理してしまうという判断も試験場においては大きな選択肢であることを肝に銘じておきたいところです。

今回のリベンジをしたいという方は，次の名古屋大学の問題も本問と同様の趣旨の問題ですので，ぜひリベンジしてみてください。

【リベンジ用問題】

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P，Q が 6 個の頂点 A，B，C，D，E，Fを以下の規則 (a)，(b) に従って移動する。

(a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b) 点 P，Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれる頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。

また，時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問に答えよ。

(1) 時刻 1 での点 P，Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

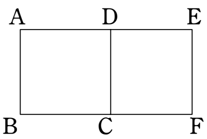


図 1

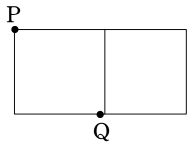


図 2

＜ ’18 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **この問題の設定を把握するための設問です。落ち着いて，あり得る状況を漏れなく洗い出しましょう。**

(2) a_1，b_1 **は (1) の結果もあるため，容易に出せると思いますが，**a_2，b_2 **は直接的に状態を追っていくのは限界があります。**

(3) で「時刻 n の状態」から「時刻 $n+1$ の状態」を考えろという設問があることも踏まえると，a_1，b_1 **から** a_2，b_2 **を出すという態度で攻めたいところです。**

2 点が同じ正方形上にあるということを区別して

左側の正方形上に 2 点がある
右側の正方形上に 2 点がある

と，区別して考えると，状態を追っていきやすくなります。

(3) **(2) での** a_1，b_1 **から** a_2，b_2 **を出すという態度が，そのまま** a_n，b_n **から** a_{n+1}，b_{n+1} **を出すことに直結します。**

(4) $p_n = a_n + b_n$ **なので，(3) で得た連立漸化式の辺々を加えたくなるでしょう。**

これにより，$p_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{3}{4}b_n$ **を得ますが，ここから** p_n **を登場させるために等式ではなく，不等号をつないで評価していきます。**

(3) の連立漸化式は一応解けますが，文字消去して出てくる 3 項間漸化式の特性方程式の解が汚い時点で，連立漸化式を解きにいくという態度は捨てます。

【解答】

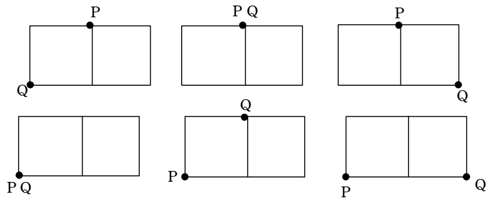
(1) 時刻 1 において，点 P は頂点 D または 頂点 B のいずれかにいる。

時刻 1 において，点 Q は頂点 B，または 頂点 D または 頂点 F のいずれかにいる。

よって，点 P，Q がいる頂点の組合せとしては

(P，Q) … (D，B)，(D，D)，(D，F)，(B，B)，(B，D)，(B，F)

これを図示すると，



(2)

状態 A_L

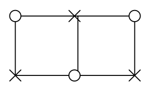
状態 A_R

状態 B

と呼ぶ。(ただし，P，Q の区別は無視する。)

2 点が重ならないという前提では，2 点の相対的な位置関係は上の 3 つの状態のいずれかしかありえない。

なぜなら，下の図において○ の次は × の頂点に移動し，



× の次は ○ の頂点に移動するため
時刻 0 において 2 点が ○ の頂点にいるので，
P，Q が○，× の両方に存在することはありえない。

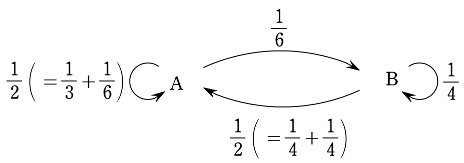
$$
A_L \to \begin{cases} A_L : 1\text{ 列目，}2\text{ 列目の点が上下方向の移動} \\ \quad\text{または　1 列目の点が左，2 列目の点が右に移動 } \left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\right)\times 2 \\ A_R : 1\text{ 列目，}2\text{ 列目の点が右に移動 } \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} \\ B : 1\text{ 列目の点が上下方向の移動，}2\text{ 列目の点が右に移動 } \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} \end{cases}
$$

$$
A_R \longrightarrow \begin{cases} A_R : \left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\right)\times 2 \\ A_L : \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} \\ B : \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} \end{cases}
$$

(対称性より上と同様に計算)

$$\mathrm{B}\to\begin{cases}\mathrm{A_L}：1\text{列目の点が上下方向の移動，2列目の点が左に移動}\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\\ \mathrm{A_R}：1\text{列目の点が右に移動，2列目の点が上下方向の移動}\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\\ \mathrm{B}：1\text{列目，2列目の点が上下方向に移動}\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\mathrm{A_L}$ または $\mathrm{A_R}$ の状態を状態 A と呼ぶと，状態推移図は次のようになる。



a_1 について，時刻 0 においては状態は $\mathrm{A_L}$ であるから，
$\mathrm{A_L}\to\mathrm{A_L}$ または $\mathrm{A_L}\to\mathrm{A_R}$ となる確率で，$\dfrac{1}{2}$

b_1 について，時刻 0 においては状態は $\mathrm{A_L}$ であるから，$\mathrm{A_L}\to\mathrm{B}$ となる確率で，$\dfrac{1}{6}$

よって，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{6}$ …答

また，a_2 とは

「時刻 1 において状態 A，かつ次の移動で状態 A」
または
「時刻 1 において状態 B，かつ次の移動で状態 A」

となる確率で，$a_2=a_1\times\dfrac{1}{2}+b_1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

一方，b_2 とは

「時刻 1 において状態 A，かつ次の移動で状態 B」
または
「時刻 1 において状態 B，かつ次の移動で状態 B」

となる確率で，$b_2=a_1\times\dfrac{1}{6}+b_1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{8}$

よって，$a_2=\dfrac{1}{3}$，$b_2=\dfrac{1}{8}$ …答

(3)　a_{n+1} とは

「時刻 n において状態 A，かつ次の移動で状態 A」
または
「時刻 n において状態 B，かつ次の移動で状態 A」

となる確率で，$a_{n+1}=a_n\times\dfrac{1}{2}+b_n\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$

また，b_{n+1} とは

「時刻 n において状態 A，かつ次の移動で状態 B」
または
「時刻 n において状態 B，かつ次の移動で状態 B」

となる確率で，$b_{n+1}=a_n\times\dfrac{1}{6}+b_n\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{4}b_n$

以上から，$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n\\ b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{4}b_n\end{cases}$ …答

(4)　(3) の漸化式を辺々加えると，

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}&=\frac{2}{3}a_n+\frac{3}{4}b_n\\&=\frac{3}{4}(a_n+b_n)-\frac{1}{12}a_n\\&\leqq\frac{3}{4}(a_n+b_n)\quad\left(\because\frac{1}{12}a_n\geqq 0\right)\end{aligned}$$

$p_n=a_n+b_n$ より，$p_{n+1}\leqq\dfrac{3}{4}p_n$ を得て，この不等式を繰り返し使うと，

$$p_n\leqq\frac{3}{4}p_{n-1}\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^2p_{n-2}\leqq\cdots\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}p_1$$

よって，

$$\begin{aligned}p_n&\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}p_1\\&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(a_1+b_1)\\&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}\\&\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{4}\quad\left(\because\frac{2}{3}\leqq\frac{3}{4}\right)\\&=\left(\frac{3}{4}\right)^n\end{aligned}$$

となり，$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ が成立する。

【リベンジ用問題 総括】

同じ正方形上にあるという状態を，細分化して考える部分にこの問題の難しさが詰まっているでしょう。

(4) の連立漸化式を解きにいくのではなく，評価する方向に行く部分も山場でしょう。
「p_n を求めよ。」でなく，「$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。」という評価を求めているということに反応したいところです。