【参考類題】

A，B，C の３人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける。残り１人になるまでじゃんけんを繰り返し，最後に残ったものを勝者とする。ただし，あいこの場合も１回のじゃんけんを行ったと数える。

(1) １回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
(2) ２回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
(3) ３回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
(4) $n \geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

＜ '04 東北大 ＞

【戦略】

頭がくしゃくしゃになりそうであれば

3人$\to$ 3人$\left(確率\ \dfrac{1}{3}\right)$, 3人$\to 2$人$\left(確率\dfrac{1}{3}\right)$, 3人$\to 1$人$\left(確率\dfrac{1}{3}\right)$

2人$\to$ 2人$\left(確率\dfrac{1}{3}\right)$，$2$人$\to 1$人$\left(確率\ \dfrac{2}{3}\right)$

という「人数変化」を先に整理しておきましょう。

あとは，これらの事象がどういう順番で起こればよいのかを追っていきます。

【解答】

１回のじゃんけんにおいて，人数の変化とその確率は以下の通り

＜３人→３人(事象 A と呼ぶ)＞ あいことなる確率で，$\dfrac{3!+3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜３人→２人(事象 B と呼ぶ)＞ ３人中２人が勝つ確率で $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜３人→１人(事象 C と呼ぶ)＞ ３人中１人が勝つ確率で $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜２人→２人(事象 D と呼ぶ)＞ あいことなる確率で，$\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

＜２人→１人(事象 E と呼ぶ)＞ ２人中１人が勝つ確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

(1) 求めるのは事象 C が起こる確率で $\dfrac{1}{3}$ …答

(2) 3人 $\xrightarrow{A}$ 3人 $\xrightarrow{C}$ 1人 または 3人 $\xrightarrow{B}$ 2人 $\xrightarrow{E}$ 1人 となる確率で

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\ \cdots 答$$

(3) 3人 $\xrightarrow{A}$ 3人 $\xrightarrow{A}$ 3人 $\xrightarrow{C}$ 1人

3人 $\xrightarrow{A}$ 3人 $\xrightarrow{B}$ 2人 $\xrightarrow{E}$ 1人

3人 $\xrightarrow{B}$ 2人 $\xrightarrow{D}$ 2人 $\xrightarrow{E}$ 1人

といういずれかが起こる確率で

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{27}\ \cdots 答$$

(4) 途中２人になることがあるかないかで場合分けする

(i) 途中２人になることがないとき

$$\overbrace{3人 \xrightarrow{A} 3人 \xrightarrow{A} 3人 \to \cdots\cdots \xrightarrow{A}}^{n-1\,回} 3人 \xrightarrow{C} 1人$$

となる確率で $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(ii)　途中 2 人になることがあるとき

k 回目の
じゃんけん

n 回目の
じゃんけん

$$3\text{人} \overbrace{\xrightarrow{A} 3\text{人} \xrightarrow{A} 3\text{人} \to \cdots\cdots \xrightarrow{A}}^{k-1\text{回}} 3\text{人} \xrightarrow{B} 2\text{人} \overbrace{\xrightarrow{D} \cdots\cdots \xrightarrow{D}}^{n-k-1\text{回}} 2\text{人} \xrightarrow{E} 1\text{人}$$

k 回目（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）のじゃんけんで 3 人から 2 人になったときを考える。

このとき，n 回目のじゃんけんで勝者が確定する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3^n}$$

k に依存しませんでした。

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^n}=\frac{2(n-1)}{3^n}$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2(n-1)}{3^n}=\frac{2n-1}{3^n}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

ドロップアウト型の構造は，本問のように漸化式に頼らない直接計算でも対応可能です。

直接計算の場合，頭を整理しないと

「あれ？今何回じゃんけんしたっけ？」

と混乱してしまいかねませんから，適宜計算用紙などで具体例を挙げながら落ち着いて処理してください。