3人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。

3人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回続いて n 回目終了時に2人残っている確率を p_n，3人残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

＜ '13 名古屋大 ＞

【戦略】

漸化式の設定がされていることから，方針面ではさほど困ることはないはずです。

ジャンケンについては

勝負がつく場合は $\begin{cases}\text{① 誰が勝つのか（負けるのか）}\\ \text{② どの手で勝つのか（負けるのか）}\end{cases}$

あいこの場合は $\begin{cases}\text{① 全員同じ手}\\ \text{② 3すくみ（3人以上のとき）}\end{cases}$

に注目します。

本問のような

「途中脱落者が出て，最後の勝ち残りが決まる」

というパターンの漸化式（私はドロップアウト型と呼んでいます）は連立漸化式を立式した際，順々に一般項が求まっていきます。

【解答】

(1) p_1 とは1回ジャンケンを行い，2人残っている（勝者が2人）となる確率。

よって，$p_1=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ …答

誰が勝つのか ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り
どの手で勝つのか3通り

q_1 とは1回ジャンケンを行い，3人残っている（あいこ）となる確率。

よって，$q_1=\dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ …答

全員同じ手（3通り）
&
3すくみ（3! 通り）

(2) $n+1$ 回目終了時に2人残っているとは

n 回目終了時に2人で，$n+1$ 回目のジャンケンがあいこ
または
n 回目終了時に3人で，$n+1$ 回目のジャンケンで誰か2人が勝つ

よって，$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{3}{3^2}+q_n\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n$

$n+1$ 回目に3人残っているとは

n 回目終了時に3人で，$n+1$ 回目のジャンケンであいこ

よって，$q_{n+1}=q_n\times\dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{1}{3}q_n$

以上から $\begin{cases}p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n & \cdots ①\\ q_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n & \cdots ②\end{cases}$ …答

② より $q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ …答

① に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

辺々 3^{n+1} をかけると，（$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ で割ると），$3^{n+1}p_{n+1}=3^n p_n+1$

$3^n p_n=P_n$ とすると，$P_{n+1}=P_n+1$ なので，

$$\begin{aligned}P_n&=P_1+(n-1)\\&=3^1p_1+n-1\\&=n\end{aligned}$$

よって，$3^n p_n=n$ となり，$p_n=\dfrac{n}{3^n}$ …答

(3) $n=1$ のとき，1 人の勝ち残りが決まる確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

$n\geqq 2$ のとき，n 回目に 1 人の勝ち残りが決まるのは

$n-1$ 回目に 2 人残っていて，n 回目のジャンケンで 1 人が勝つ
または
$n-1$ 回目に 3 人残っていて，n 回目のジャンケンで 1 人が勝つ

という場合で，その確率は

$$\begin{aligned} p_{n-1}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^2}+q_{n-1}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^3} &= \frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{3^n} \end{aligned}$$

（これは $n=1$ のときも成立する。）

よって，求める確率は $\dfrac{2n-1}{3^n}$ …答

【総括】

ジャンケンは典型的な「ドロップアウト型」の構造をとっています。

どんどん脱落者が出ていき，最後勝ち残るという構造は基本的には
”不可逆的”です。

（3 人 → 3 人 → …… → 3 人 → 2 人 → … … → 2 人 → 1 人 といったような構造）

ドロップアウト型の構造に対して連立漸化式から攻め込むと

「順々に求まっていく」

という特徴的な流れがあり，この連立漸化式の処理は見かけほど大変とはなりません。

なお，ドロップアウト型構造の問題は漸化式を経由せずに直接考えることも可能です。

本問と同じ問題だけれども漸化式を匂わせないような出題が 2004 年度の東北大などで出題されています。

【参考類題】

A，B，C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける。残り 1 人になるまでじゃんけんを繰り返し，最後に残ったものを勝者とする。ただし，あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

(1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4) $n \geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

＜ '04 東北大 ＞

【戦略】

頭がくしゃくしゃになりそうであれば

3 人→ 3 人 $\left(\text{確率 } \frac{1}{3}\right)$，3 人→2 人 $\left(\text{確率} \frac{1}{3}\right)$，3 人→1 人$\left(\text{確率} \frac{1}{3}\right)$

2 人→ 2 人 $\left(\text{確率} \frac{1}{3}\right)$，2 人→1 人 $\left(\text{確率 } \frac{2}{3}\right)$

という「人数変化」を先に整理しておきましょう。

あとは，これらの事象がどういう順番で起これればよいのかを追っていきます。

【解答】

1 回のじゃんけんにおいて，人数の変化とその確率は以下の通り

＜ 3 人 → 3 人 (事象 A と呼ぶ) ＞ あいことなる確率で，$\dfrac{3!+3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜ 3 人 → 2 人 (事象 B と呼ぶ) ＞ 3 人中 2 人が勝つ確率で $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜ 3 人 → 1 人 (事象 C と呼ぶ) ＞ 3 人中 1 人が勝つ確率で $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

＜ 2 人 → 2 人 (事象 D と呼ぶ) ＞ あいことなる確率で，$\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

＜ 2 人 → 1 人 (事象 E と呼ぶ) ＞ 2 人中 1 人が勝つ確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

(1) 求めるのは事象 C が起こる確率で $\dfrac{1}{3}$ … 答

(2) 3 人 $\xrightarrow{A}$ 3 人 $\xrightarrow{C}$ 1 人 または 3 人 $\xrightarrow{B}$ 2 人 $\xrightarrow{E}$ 1 人 となる確率で

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \cdots \text{答}$$

(3) 3 人 $\xrightarrow{A}$ 3 人 $\xrightarrow{A}$ 3 人 $\xrightarrow{C}$ 1 人

3 人 $\xrightarrow{A}$ 3 人 $\xrightarrow{B}$ 2 人 $\xrightarrow{E}$ 1 人

3 人 $\xrightarrow{B}$ 2 人 $\xrightarrow{D}$ 2 人 $\xrightarrow{E}$ 1 人

というい ずれかが起こる確率で

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{27} \cdots \text{答}$$

(4) 途中 2 人になることがあるかないかで場合分けする

(i) 途中 2 人になることがないとき

$$\overbrace{3\text{ 人} \xrightarrow{A} 3\text{ 人} \xrightarrow{A} 3\text{ 人} \to \cdots\cdots \xrightarrow{A}}^{n-1\text{ 回}} 3\text{ 人} \xrightarrow{C} 1\text{ 人}$$

となる確率で $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(ii)　途中 2 人になることがあるとき

k 回目のじゃんけん　n 回目のじゃんけん

$$3\text{人} \overbrace{\xrightarrow{A} 3\text{人} \xrightarrow{A} 3\text{人} \rightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{A}}^{k-1\text{回}} 3\text{人} \xrightarrow{B} 2\text{人} \overbrace{\xrightarrow{D} \cdots\cdots \xrightarrow{D}}^{n-k-1\text{回}} 2\text{人} \xrightarrow{E} 1\text{人}$$

k 回目（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）のじゃんけんで 3 人から 2 人になったときを考える。

このとき，n 回目のじゃんけんで勝者が確定する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3^n}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^n}=\frac{2(n-1)}{3^n}$

k に依存しませんでした。

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2(n-1)}{3^n}=\frac{2n-1}{3^n}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

ドロップアウト型の構造は，本問のように漸化式に頼らない直接計算でも対応可能です。

直接計算の場合，頭を整理しないと

「あれ？今何回じゃんけんしたっけ？」

と混乱してしまいかねませんから，適宜計算用紙などで具体例を挙げながら落ち着いて処理してください。