1個のさいころを投げ，出た目が3か6のとき持ち点に1を加え，それ以外のときは1だけ減らすことを繰り返すゲームをする。

はじめの持ち点を2とし，持ち点が0またはnになればゲームは終了するものとする。ただし，nは3以上の整数である。

(1) $n=3$とする。ちょうど5回投げたときにゲームが終了する確率を求めよ。

(2) $n=4$とする。ちょうど6回投げたときにゲームが終了する確率を求めよ。

(3) 持ち点が0点となる確率を求めよ。

＜ ’04 大阪市立大 改 ＞

【戦略】

(1)，(2) は横軸にさいころを投げる「回数」，縦軸に持ち点を考えて図示すれば，どのように推移していけばよいかが目に見えて分かります。

(1) は一本道ですし，(2) は2回目，4回目，6回目と2回区切りで考えると分かりやすいでしょう。

(3) は「破産の確率」と呼ばれるタイプで，初見で解ききることは非常に困難です。

今回の2点持っている人が破産するまでのストーリーは無数にあるため，破産の確率では直接計算が不可能です。
（勝って，勝って，負けて，勝って，負けて，…… などなど）

そこで漸化式を導入するのですが，この漸化式の立て方も独特です。

k点の状態から $\begin{cases}\text{1点増えて } k+1 \text{ 点となり，やがて破産する}\\ \text{1点減って } k-1 \text{ 点となり，やがて破産する}\end{cases}$

ということで，$p_k=\dfrac{1}{3}p_{k+1}+\dfrac{2}{3}p_{k-1}$

と，p_k を，その前後の p_{k+1}，p_{k-1} を用いて表します。
（最初の一手で場合分け）

（解答では番号を1つ上げて $p_{k+1}=\dfrac{1}{3}p_{k+2}+\dfrac{2}{3}p_k$ として考えます。）

これにより $p_{k+2}-3p_{k+1}+2p_k=0$ という見慣れた3項間漸化式になり，やっと解決かと思いますが，一難去ってまた一難です。

一般項を求める際に利用する p_1 が出ないのです。

今回分かっている初期条件は $p_0=1$，$p_n=0$ です。

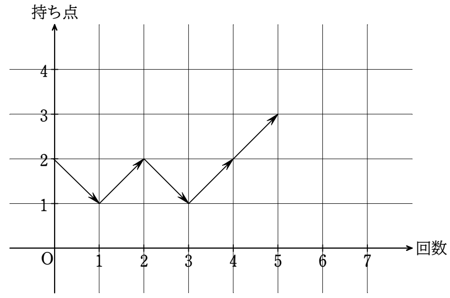
これらを用いるためには，

> 一般に3項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ について，
> $X^2+pX+q=0$ が異なる2つの解 α，β をもつとき
> $$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$$
> で表される。

という経験がないと苦しいと思います。

【解答】

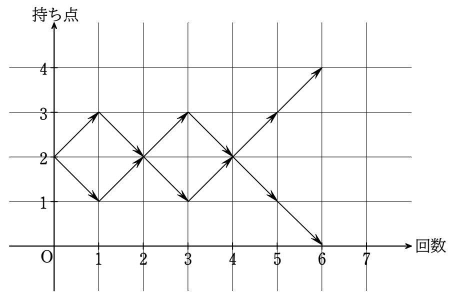
(1)



持ち点が 2 → 1 → 2 → 1 → 2 → 3 と変化するときの確率を求めればよい。

よって，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{243}$ … 答

(2)



2回さいころを投げたときに2点である必要がある。

その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$

さらにそこから2回さいころを投げたときに2点である必要がある

その確率は先ほどと同様で $\dfrac{4}{9}$

そこから2回サイコロを投げて

$+1$点，$+1$点 となる または -1点，-1点 となる

となる必要があり，その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{9}$

以上から，$\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{80}{729}$ … 答

(3) k点 ($k=0$，1，2，……，n) の状態からやがて持ち点がなくなる確率を p_k とする。

このとき $p_0=1$，$p_n=0$

p_{k+1} について考える。

$\begin{cases}\text{確率 } \dfrac{1}{3} \text{ で持ち点が } +1 \text{ されて，その後やがて持ち点がなくなる}\\ \text{または}\\ \text{確率 } \dfrac{2}{3} \text{ で持ち点が } -1 \text{ されて，その後やがて持ち点がなくなる}\end{cases}$

のいずれかである。

© MathClinic

よって

$$p_{k+1}=\frac{1}{3}p_{k+2}+\frac{2}{3}p_k$$

これを整理すると

$$p_{k+2}-3p_{k+1}+2p_k=0$$

これより，$p_k=A\cdot 1^k+B\cdot 2^k$ と表される。

> **注意**：一般に 3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ について，
> $X^2+pX+q=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき
> $$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$$
> で表される。

$p_0=1$，$p_n=0$ なので

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A+2^nB=0 \end{cases}$$

これら 2 式から $A=\dfrac{2^n}{2^n-1}$，$B=-\dfrac{1}{2^n-1}$

よって，

$$\begin{aligned} p_k&=\frac{2^n}{2^n-1}-\frac{2^k}{2^n-1} \\ &=\frac{2^n-2^k}{2^n-1} \end{aligned}$$

今求めるものは p_2 であり，$p_2=\dfrac{2^n-4}{2^n-1}$

【総括】

(1)，(2) も筋が悪いと右往左往しかねません。

回数と得点の推移を視覚化することは，ある程度のレベルになってくると割とよくやる手です。

(3) の破産の確率は初見ではまず無理です。

漸化式の立て方，そしてその処理の仕方，いずれも独特なものがあります。

特に最後の **注意** で使った事は，自明のものとしてよいか怪しいと思ったら，軽く証明をつけておけばよいでしょう。

注意 の証明の概略

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ より，$a_{n+1}-\beta a_n=A'\alpha^{n-1}$
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ より，$a_{n+1}-\alpha a_n=B'\beta^{n-1}$

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)a_n&=A'\alpha^{n-1}-B'\beta^{n-1} \\ &=\frac{A'}{\alpha}\alpha^n-\frac{B'}{\beta}\beta^n \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{A'}{\alpha(\alpha-\beta)}=A$，$\dfrac{-B'}{\beta(\alpha-\beta)}=B$ とおくと，$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と表せる。

復習用としてもう一題つけておきますので，ぜひどうぞ。

© MathClinic

【復習用問題】

成功の確率が $\dfrac{1}{6}$ のゲームを何回か繰り返す。

はじめに 9 枚以下のコインをもっていて，各ゲームごとに成功したらコインを 1 枚もらい，失敗したらコインを 1 枚失う。もっているコインが 10 枚になるか，またはなくなったらゲームをやめる。ただし，このゲームにおいては成功か失敗のいずれか一方のみが起こるものとする。

k 枚のコインから始めて，コインが 10 枚になる前になくなる確率を p_k（$0<k<10$）で表し，$p_0=1$，$p_{10}=0$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) p_{k+1} を p_k，p_{k-1} を用いて表せ。

(2) p_k を求めよ。

＜ ’04 大阪女子大 ＞

【戦略】

コインが k 枚の状態からスタートして「やがて無くなる（破産する）」確率を求めるのですが，k 枚の状態から破産するまでのストーリーは無限にあり，全てのパターンを書き出す，あるいは規則性を追っていくことは不可能です。

破産の確率は「最初の一手で場合分け」という態度が特効薬です。

【解答】

(1) k 枚の状態からやがてコインがなくなるのは

$$\begin{cases} \text{成功して } k+1 \text{ 枚になって，いずれなくなる} \left(\text{確率 } \dfrac{1}{6}\times p_{k+1}\right) \\ \text{失敗して } k-1 \text{ 枚になって，いずれなくなる} \left(\text{確率 } \dfrac{5}{6}\times p_{k-1}\right) \end{cases}$$

のいずれかなので，$p_k=\dfrac{1}{6}p_{k+1}+\dfrac{5}{6}p_{k-1}$

ゆえに，$p_{k+1}=6p_k-5p_{k-1}$ …答

(2) $p_{k+2}-6p_{k+1}+5p_k=0$ であり，$p_k=A\cdot 5^k+B\cdot 1^k$ と表せる。

すなわち，$p_k=A\cdot 5^k+B$

$p_0=1$ なので，$A+B=1$ …①

$p_{10}=0$ なので，$5^{10}A+B=0$ …②

②−① より，$(5^{10}-1)A=-1$

ゆえに，$A=\dfrac{1}{1-5^{10}}$ で，① より $B=1-A=\dfrac{5^{10}}{5^{10}-1}$

以上から

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{5^k}{1-5^{10}}+\frac{5^{10}}{5^{10}-1} \\ &= \frac{5^{10}-5^k}{5^{10}-1} \end{aligned}$$
（$k=0$，1，2，…，10）…答

【総括】

破産の確率はどちらかと言うと，マニアックな部類の問題ですが，出題されればとても差がつく破壊力の高い話題でしょう。

経験があるかないかで完答できるかどうかが左右されかねませんので，一度は経験しておきましょう。

© MathClinic