正 n 角形の頂点によって作る三角形

　n は 3 以上の整数とし，円周を n 等分する点を A_1，A_2，…，A_n とする。これらの点の中から異なる 3 点を選び，それらを結んで作られる三角形を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点の選び方は全部で何通りあるか。
(2)　n が偶数のとき，直角三角形となる点の選び方は何通りあるか。
(3)　n が偶数のとき，鈍角三角形となる点の選び方は何通りあるか。
(4)　n が奇数のとき，鈍角三角形となる点の選び方は何通りあるか。
(5)　n が奇数のとき，鋭角三角形となる点の選び方は何通りあるか。

＜ ’17　同志社大 ＞

【戦略】

(2)　**直角三角形の作成においては「直径」に注目するのが正攻法でしょう。**

(3)　**鈍角とするために基準となる直径に注目します。**

$n=2m$ **とします。**

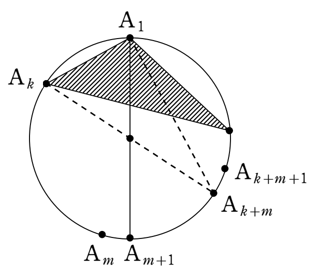
このとき，線分 A_jA_{j+m} **は直径となります。**

もう少し噛み砕いて言うと，
添え字が $+m$ **されるとお向かいさん**
になるということです。

例えば，$\angle A_1$ **を鈍角にしようとすることを考えます。**

線分 A_kA_{k+m} **を基準とします。このままだと** $\triangle A_1A_kA_{k+m}$ **は直角三角形です。**

そこで，A_1，A_k **を固定すれば，残りは** A_{k+m+1}，A_{k+m+2}，… **から選べばよいことになります。**



あとは $k=2$，3，…，m **について** $\sum$ **計算すればよいでしょう。**

ただ，これは $\angle A_1$ **を鈍角にするような残り 2 点の決め方です。**

$\angle A_2$，$\angle A_3$，……，$\angle A_{2m}$ **を鈍角にするような残り 2 点の決め方について考えることも忘れずにしましょう。**

(4)　n **が奇数のときだと直径がありません。**

ただ，正 $2m+1$ **角形に対して，**$\angle A_1$ **を鈍角にしようと考え，**
A_1，A_k **と固定したとき残る 1 点をどうするかということを考える流れは (3) とほぼ同じです。**

(5)　**直角三角形はありえませんから，(1) の総数から (4) で求めた総数を除けば解決です。**

【解答】

(1)　${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 【通り】… 答

(2)　$n=2m$ （$m=2$，3，4，…）とする。

題意の頂点を結んでできる直径は全部で m 本ある。

ゆえに，直径となる 2 点の選び方は $m\left(=\dfrac{n}{2}\right)$ 通り

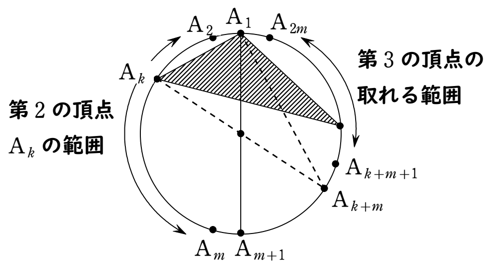
残り 1 点の選び方は $n-2$ 通り

よって，$\dfrac{n}{2}\cdot(n-2)=\dfrac{1}{2}n(n-2)$ 【通り】… 答

(3)　$n=2m$ （$m=2$，3，4，…）とする。

$\angle A_1$ が鈍角となるような残りの 2 点の決め方を考える。

一般に線分 A_jA_{j+m}（$j=1$，2，3，…，m）が円の直径であることに注意する。



残り 2 点のうち 1 つを A_k（$k=2$，3，…，m）とする。

残る 1 点は

$$A_{k+m+1},\ A_{k+m+2},\ \cdots,\ A_{2m}$$

から選べばよく

$$2m-(k+m+1)+1=m-k \text{【通り】}$$

よって，$\angle A_1$ が鈍角となるような残り 2 点の決め方は

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{m}(m-k)&=\sum_{k=1}^{m}(m-k)-(m-1)\\&=m^2-\frac{1}{2}m(m+1)-(m-1)\\&=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1\text{【通り】}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}$ にしておいて $k=1$ のときを除きます

$\angle A_2$，$\angle A_3$，……，$\angle A_{2m}$ が鈍角となるときも同様なので

$$\begin{aligned}2m\cdot\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1\right)&=m(m^2-3m+2)\\&=m(m-1)(m-2)\text{【通り】}\end{aligned}$$

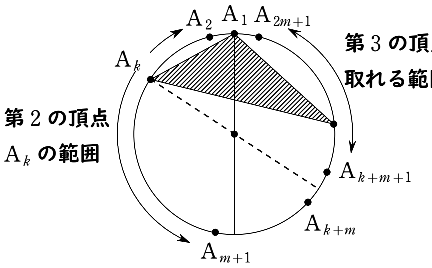
$n=2m$ より $m=\dfrac{n}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n-1\right)\left(\frac{1}{2}n-2\right)=\frac{1}{8}n(n-2)(n-4)\text{【通り】… 答}$$

(4)　$n=2m+1$ $(m=1,2,\cdots)$ とする。

$\angle A_1$ が鈍角となるような残り 2 点の決め方を考える。

n が奇数のときは題意の頂点を結んで直径となることはない。



残り 2 点のうち 1 つを A_k $(k=2,3,\cdots,m+1)$ とする。

残る 1 点は

$$A_{k+m+1},\ A_{k+m+2},\ \cdots,\ A_{2m+1}$$

から選べばよく

$$(2m+1)-(k+m+1)+1=m-k+1 \text{【通り】}$$

よって，$\angle A_1$ が鈍角となるような残り 2 点の決め方は

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{m+1}(m-k+1)&=\sum_{k=1}^{m+1}(m-k+1)-(m-1+1)\\&=(m+1)^2-\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-m\\&=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m \text{【通り】}\end{aligned}$$

$\angle A_2$，$\angle A_3$，……，$\angle A_{2m+1}$ が鈍角となるときも同様なので

$$(2m+1)\cdot\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m\right)=\frac{1}{2}m(m-1)(2m+1)\text{【通り】}$$

$n=2m+1$ より $m=\dfrac{n-1}{2}$ なので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\cdot n=\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\text{【通り】}\cdots \text{答}$$

(5)　n が奇数のときは題意の頂点を結んで直径となることはない。

すなわち，題意の頂点を結んで直角三角形はできない。

ゆえに (1)，(4) の結果から

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\\&=\frac{1}{24}n(n-1)\{4(n-2)-3(n-3)\}\\&=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)\text{【通り】}\cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

正多角形の頂点を結んで作る三角形が

鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形

となるような場合の数や確率について考えさせせる問題は頻出です。

その中でも，本問は一般論に近い問いかけ方をしているので，本問をマスターすれば，具体的な場合に関しては今後苦労することはないでしょう。
（もちろん今回の話題以外のことが問われることもありますが）