$N=2^{131}+192$ とする。以下の問いに答えよ。
ただし，必要ならば，$\log_{10}2=0.3010$ を用いてよい。
(1) 正の整数 n に対し，$2^{3n}-1$ は7の倍数であることを示せ。
(2) N は 224 の倍数であることを示せ。
(3) N は何桁の数か。
(4) N を 224 で割った商は何桁の数か。

＜ '89 金沢大 ＞

【戦略】

(1) $2^3=8\ (=7+1)$ **と見て二項定理に走る方針が定番でしょうか。**

このあたりがパッと見えるかどうかについては基礎的な学習がきっちりと定着しているかどうかでしょう。

(2) $224=2^5\cdot 7$ **なので，**N **が** 2^5 **の倍数 かつ** 7 **の倍数 と言えればよいことになります。**

$192=2^6\cdot 3$ **なので，**N **が** 2^5 **の倍数 であることは即解決しそうです。**

7 **の倍数であることをどう示すかですが，**$192=7\cdot 27+3$

と，192 **を** 7 **で割った余りが** 3 **ですから，**2^{131} **を** 7 **で割った余りが** 4 **であることが言えれば解決です。**

少し知識的な側面を必要としますが

自然数の累乗を何かで割った余りは周期性をもちます。

以下法を 7 **とすると**

$2^1\equiv 2,\quad 2^2\equiv 4,\quad 2^3\equiv 1,\quad 2^4\equiv 2,\quad 2^5\equiv 4,\quad 2^6\equiv 1$

です。

2 **の累乗を** 7 **で割った余りが** $2,\ 4,\ 1$ **と，周期** 3 **で繰り返しになっています。**

これを示すためには 2^{n+3} **と** 2^n **を** 7 **で割った余りが等しいことを示せばよいでしょう。**

合同式的には $2^{n+3}\equiv 2^n$**，すなわち** $2^{n+3}-2^n\equiv 0$ **を示すことになるので，**$2^{n+3}-2^n$ **が** 7 **の倍数であることが言えれば解決です。**

(3) **定番の桁数問題ですが，**192 **が邪魔です。**

とはいえ，2^{131} **から見たら，**192 **などゴミみたいなものですから桁数に影響を与えているのは** 2^{131} **の方でしょう。**

もちろん $+192$ **の影響で繰り上がって桁数が増えることも，もしかしたらあり得るかもしれないので，記述は抜かりなくしなければいけません。**

あくまで，$10^{\square}<N<10^{\bigcirc}$ **と** N **を挟みますが，挟む際は「ラフに」評価していきます。**

(4) $\dfrac{N}{2^5\cdot 7}$ **が今回のターゲットである商です。**

目標は $10^{\square}<\dfrac{N}{2^5\cdot 7}<10^{\bigcirc}$ **と挟むことです。**

$\dfrac{2^{131}+192}{2^5\cdot 7}$ **というものに対して，与えられた近似値は** $\log_{10}2$ **しかありませんから，**

2の累乗以外は登場させたくない

という気持ちで評価していきます。

まず，$\dfrac{2^{131}+192}{2^5\cdot 7}>\dfrac{2^{131}+192}{2^5\cdot 2^3}$ **と分母の** 7 **を** 2^3 **に置き換えて評価し**

$\dfrac{2^{131}+192}{2^5\cdot 2^3}>\dfrac{2^{131}}{2^8}$ **と** $+192$ **をカットしてしまえば**

$\dfrac{N}{224}>2^{123}$ **と評価できると思います。**

あとは，$\dfrac{N}{224}<2^{124}$ **で上からおさえられているかが勝負です。**

これより $2^{124}\cdot 224-N>0$**，すなわち** $2^{129}\cdot 7-(2^{131}+192)>0$

を示せばよく，これは左辺を $2^{129}(7-2^2)-192$ **と見れば明らかに成立し，解決です。**

【解 1】

(1) $$\begin{aligned}2^{3n}-1&=(2^3)^n-1\\&=8^n-1\\&=(7+1)^n-1\\&=7^n+{}_n\mathrm{C}_1 7^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 7^{n-2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}7^1+1^n-1\\&=7\times(\text{整数})\end{aligned}$$

より，題意は示された。

(2) $224=2^5\cdot 7$ なので，

N が $2^5\,(=32)$ の倍数 かつ 7 の倍数

であることを示せばよい。

$$\begin{aligned}N&=2^{131}+192\\&=2^{131}+2^6\cdot 3\\&=2^5(2^{126}+2^1\cdot 3)\\&=2^5\times(\text{整数})\end{aligned}$$

より，N は 2^5 の倍数である。… ①

一方で，

$$\begin{aligned}2^{n+3}-2^n&=2^n(2^3-1)\\&=7\cdot 2^n\end{aligned}$$

より，2^{n+3} と 2^n を 7 で割った余りは等しい。

ゆえに，k を整数として，2^{3k+2} と表せる数を 7 で割った余りは 2^2 を 7 で割った余りと等しく，4 である。

これより，$2^{131}\,(=2^{3\cdot 43+2})$ を 7 で割った余りは 4 なので

$2^{131}=7m_1+4$ (m_1 は整数) と表せる。

$192=7\cdot 27+3$ なので

$$\begin{aligned}N&=7m_1+4+7\cdot 27+3\\&=7(m_1+28)\end{aligned}$$

より，N は 7 の倍数である。… ②

①，② より題意は示された。

(3) $\log_{10}2^{131}=131\log_{10}2=131\times 0.3010=39.431$

$\log_{10}2^{132}=132\log_{10}2=132\times 0.3010=39.732$

$2^{131}<2^{131}+192<2^{132}$ であるので，$10^{39.431}<N<10^{39.732}$

左側の不等号の成立は明らか。
右側の不等号については
$2^{132}-(2^{131}+192)=2^{131}(2-1)-192=2^{131}-192>0$
となり成立する。

これより，$10^{39}<N<10^{40}$ を得るため，N は 40 桁 … 答

(4) $$\frac{N}{224}=\frac{N}{32\cdot 7}=\frac{2^{131}+192}{2^5\cdot 7}>\frac{2^{131}}{2^5\cdot 7}>\frac{2^{131}}{2^5\cdot 2^3}=2^{123}$$

一方，$$\begin{aligned}2^{129}\cdot 7-(2^{131}+192)&=2^{129}(7-2^2)-192\\&=3\cdot 2^{129}-129\\&>0\end{aligned}$$

これを目論んで
逆算的に記述して
います。

これより $2^{131}+192<2^{129}\cdot 7$

両辺 $2^5\cdot 7\,(>0)$ で割ると，$\dfrac{2^{131}+192}{2^5\cdot 7}<2^{124}$ を得る。

以上から，$2^{123}<\dfrac{N}{224}<2^{124}$

ここで，

$\log_{10}2^{123}=123\log_{10}2=123\times 0.3010=37.023$

$\log_{10}2^{124}=124\log_{10}2=124\times 0.3010=37.324$

ゆえに，$10^{37.023}<\dfrac{N}{224}<10^{37.324}$

これより，$10^{37}<\dfrac{N}{224}<10^{38}$ を得るため，N を 224 で割った商は

38 桁 … 答

【戦略 2】(1) について

二項定理の前に「数学的帰納法」が目に付いたという人もいるかもしれません。

個人的には大袈裟だと思いますが，そちらでもやってみます。

【解 2】(1) について

$n=1, 2, \cdots$ に対して $2^{3n}-1$ が 7 の倍数である … $(*)$

ということを n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $2^{3\cdot 1}-1=7\,(=7\cdot 1)$ より $(*)$ は正しい。

(ii) $n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき

$2^{3k}-1=7M$ (M は整数) …(☆) と表せると仮定する。

$$\begin{aligned}2^{3(k+1)}-1&=8^{k+1}-1\\&=8\cdot 8^k-1\\&=8(7M+1)-1\ (\because (☆))\\&=7(8M+1)\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

(i)，(ii) より，題意は示された。

【戦略 3】(1) について　〜方針のみ〜

$$\begin{aligned}(2^3)^n-1&=8^n-1\\&=(8-1)(8^{n-1}+8^{n-2}+\cdots\cdots+8+1)\\&=7(8^{n-1}+8^{n-2}+\cdots\cdots+8+1)\end{aligned}$$

と因数分解できることに気が付けば一撃です。

【戦略 4】(2)，(4) について　〜方針のみ〜

$N=2^5(2^{126}+6)$ **なので，2^5 の倍数であることは余裕でクリアーです。**

残すハードルは 7 の倍数であることの証明ですが，(1) を利用しようという意識で

$$2^{126}+6=(2^{3\cdot 42}-1)+7$$

と見ることができれば，(1) より $2^{3\cdot 42}-1$ は 7 の倍数ですから，それに 7 を加えた $2^{126}+6$ は当然 7 の倍数です。

ゆえに，$2^{126}+6=7K$ … (★)（K は整数）とおけるので

$N=2^5\cdot 7K$ **となり，ダイレクトに $N=224K$ と見ることができます。**

そうなると，(4) も $\dfrac{N}{224}=K$ ですから，(★) から $\dfrac{N}{224}=\dfrac{2^{126}+6}{7}$ と見ることができます。

すると，$\dfrac{2^{126}+6}{7}>\dfrac{2^{126}+6}{2^3}>\dfrac{2^{126}}{8}=2^{123}$ と 少しだけ「手なりに進んでいく感」が増すと思います。

あとは【解 1】に準じます。

【総括】

定番の桁数問題ですが，ちょっとしたイレギュラー要素も含んでおり，システマティックな勉強しかしていないと，あたふたしかねません。

$+192$ の部分に目を奪われすぎると頭に血が昇ってしまいます。

むしろ等号を諦めて，不等号をつなごうというラフな気持ちが活路となりました。

N の桁数をほぼ支配しているのは 2^{131} の部分で，192 はゴミみたいなもんだろうという「大局的な見方」が必要です。

細部に目を配る近視眼的な見方ももちろん大切ですが，こういった大局観を養うことも大切であることを教訓としたい問題です。