複素数 z が $|z|=1$ を満たしながら動くとき，次の式で定まる w について以下の問いに答えよ。

$$w=\frac{(1+z)^2}{2}$$

(1) w の虚部のとる値の範囲を求めよ。

(2) w が複素数平面上に描く曲線の長さを求めよ。（複素数平面上の長さは座標平面上の長さと同じとする。）

＜ ’05 早稲田大 ＞

【戦略】

点 z の動きに伴って連動して動く点 w の軌跡を追っていく問題では

$w=(z$ の式$)$ から $z=(w$ の式$)$ に変形

↓

z を縛っている等式に代入

↓

w を縛る（w の動きを決定づける）等式を Get

という流れで点 w の動きを追うのが基本です。

ただ今回は $w=\dfrac{(1+z)^2}{2}$ から $z=(w$ の式$)$ にすることが億劫です。

そこで，$|z|=1$ を動く点 z を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ と極形式で表現することで，

$$w=f(\theta)+g(\theta)i$$

の形に持ち込み，$w=x+yi$ とおくことで

$$\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=g(\theta) \end{cases}$$

というパラメータ表示によって，点 w の軌跡を追っていきます。

そうなれば，結局はパラメータ表示された曲線の長さを求めるという求値問題に帰着します。

【解答】

(1) $|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおける。

$$\begin{aligned}(1+z)^2&=\{(1+\cos\theta)+i\sin\theta\}^2\\&=(1+\cos\theta)^2+2\sin\theta(1+\cos\theta)i+i^2\sin^2\theta\\&=(1+\cos\theta)^2-(1-\cos^2\theta)+2\sin\theta(1+\cos\theta)i\\&=2\cos\theta\,(1+\cos\theta)+2\sin\theta\,(1+\cos\theta)i\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}w&=\frac{1}{2}(1+z)^2\\&=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)i\end{aligned}$$

$w=x+yi$ とすると

$$\begin{cases} x=\cos\theta(1+\cos\theta) \\ y=\sin\theta(1+\cos\theta) \end{cases}\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

であり，このパラメータ表示で表された曲線を C とする。

点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡がこの曲線 C である。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(-\sin\theta)\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta\\&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)+\cos\theta\\&=2\cos^2\theta+\cos\theta-1\\&=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$\cos\theta+1\geqq 0$（等号成立は $\theta=\pi$ のとき）であることに注意して増減表をかくと

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

w の虚部（$=\mathrm{Im}(w)$ とおく）がとり得る値の範囲は

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\leqq\mathrm{Im}(w)\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4}\ \cdots\ 答$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=(-\sin\theta)(1+\cos\theta)+\cos\theta(-\sin\theta)\\&=-\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\\&=-\sin2\theta-\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(-\sin\theta)\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta\\&=\cos2\theta+\cos\theta\end{aligned}$$

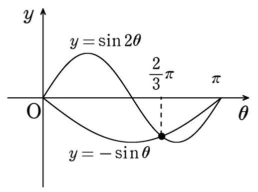
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(-\sin 2\theta-\sin\theta)^2+(\cos 2\theta+\cos\theta)^2$$
$$=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$\quad+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=2+2\cos(2\theta-\theta)$$
$$=2(1+\cos\theta)$$
$$=2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

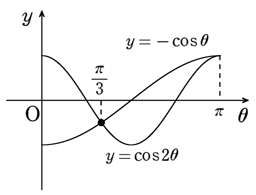
$x(\theta)=\cos\theta\,(1+\cos\theta)$, $y(\theta)=\sin\theta\,(1+\cos\theta)$ とおくとき，

$$x(2\pi-\theta)=x(\theta),\ y(2\pi-\theta)=-y(\theta)$$

曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ で動く部分と，$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ で動く部分は
x 軸対称である。

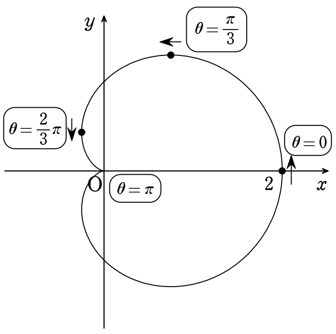
また，$\dfrac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)-\sin 2\theta$ 　　$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta-(-\cos\theta)$





θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	$\cdot$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\cdot$	$\rightarrow$	$\cdot$
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdot$
$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
$(x,\ y)$	$(2,\ 0)$		$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		$(0,\ 0)$

x 軸についての対称性に気を付けて図示すると



よって $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で θ が動くとき，
点 $\mathrm{P}(w)$ の描く曲線は同じところを重なって動くことはない。

求める長さを L とすると

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta\quad(\because\ x\text{ 軸に関する対称性})$$
$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=8\ \cdots\ \text{答}$$

【戦略 2】

$\begin{cases} x=\cos\theta\,(1+\cos\theta) \\ y=\sin\theta\,(1+\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ **というパラメータ曲線 C は**

$r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ **という極方程式で与えられる曲線と同じです。**

よって極方程式で与えられる点の動く道のりを与える公式

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

で仕留めてみます。

【解 2】部分的別解

点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡は，極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で与えられる。

求める長さを L とすると

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

（後の計算は【解 1】に準じる）

【総括】

複素数の問題では「実部虚部を持ち出すかどうか」というのが方針決定上大切な問題です。

実部虚部を持ち出して xy 平面の話に持ち込むのが確実性は高く，安心感のある方針です。

もちろん，「複素数を複素数のまま扱う」という力もしっかりと確認しておきましょう。

ちなみに今回扱った $\begin{cases} x=\cos\theta\,(1+\cos\theta) \\ y=\sin\theta\,(1+\cos\theta) \end{cases}$ で与えられる曲線 C は

「カージオイド」と呼ばれる有名曲線です。

もう一度注意点をおさらいします。

解答のように $x(\theta)=\cos\theta\,(1+\cos\theta)$，$y(\theta)=\sin\theta\,(1+\cos\theta)$ とすると

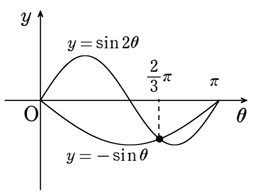
$x(2\pi-\theta)=x(\theta)$，$y(2\pi-\theta)=-y(\theta)$ ですから，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ で動く部分と，$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ で動く部分は x 軸対称です。

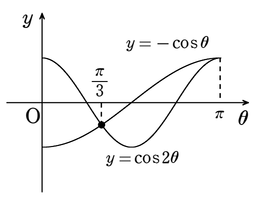
そこに注意して図示していきます。

$$\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)-\sin 2\theta \qquad \frac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta-(-\cos\theta)$$

敢えて「差」の形にして符号を判断します

と見て





グラフの上下で，$\frac{dx}{d\theta}$，$\frac{dy}{d\theta}$ の符号を判定しながら，増減表をかくと

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	$\cdot$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\cdot$	$\rightarrow$	$\cdot$
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdot$
$\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x, y)	$(2, 0)$		$\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		$(0, 0)$

となります。

パラメータ表示された曲線の増減表については，指導者のクセなどもあるでしょうが，私は上のように 7 段の増減表を書きます。

進む向きを示す速度ベクトル $\left(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta}\right)$ の段を組み込むと分かりやすいので盛り込むようにしています。

あとは x 軸についての対称性に気を付けて図示します。

【（ぼやき）】

「複素数 z が $|z|=1$ を満たしながら動く」という表現だけでは
複素数 w が動く長さも決まりません。

z がグルグル動けば，w もグルグル動くからです。

重なっていないという前提で「道のり」＝「曲線の長さ」ということが言えるので，今回は好意的に解釈し，w が同じところを重なって動かない範囲内で考えて，それを曲線の長さと捉えました。

また，z が 1 周するからといって w も 1 周するとは限りません。

例えば

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ に対して，
$$w=z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$
で与えられる点 w を考えます。

θ を $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ と点 z が半径 1 の円上を 1 周したとしても点 w は
半径 1 の円上を 2 周します。

このとき，$w=x+yi$ として $\begin{cases} x=\cos 2\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

というパラメータ表示に対して，$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ で計算しても

$$\begin{aligned} L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}\,d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 2\theta+4\cos^2 2\theta}\,d\theta \\ &=4\pi \end{aligned}$$

となります。

これは曲線の長さではなく，点 w が動いた「道のり」です。

そういった意味で，本問はもう少し出題に気を遣うべきだと思います。

注意喚起の意味でも問題文は敢えて「原文のまま」にしてあります。