1から5までの番号が1つずつ書かれた5枚のカードが箱に入っている。この箱からカードを1枚取り出し，番号を確認してからもとに戻す。
この試行を3回続けて行い，取り出したカードの番号を順に a_1，a_2，a_3 とする。

(1) $a_1<a_2<a_3$ となる確率を求めなさい。

(2) $(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)=0$ となる確率を求めなさい。

(3) $a_1a_2-a_2a_3+a_3a_1=0$ となる確率を求めなさい。

＜ '19 秋田大 ＞

【戦略】

(1) **a_1，a_2，a_3 の大小が決まっているので，問題は数字だけです。**

逆に言えば数字さえ決めれば小さい方から a_1，a_2，a_3 と，自動的に対応します。

(2) **$a_1=a_2$ または $a_2=a_3$ または $a_3=a_1$ が成立する確率です。**

これは $a_1=a_2$，$a_2=a_3$，$a_3=a_1$ の「少なくとも1つ」が成立する確率で，直接考えるよりも余事象を考えた方が効率的でしょう。

(3) **a_1，a_2，a_3 は高々5通りずつです。**

整数問題的に考えて，a_1，a_2，a_3 を特定しにいくことを考えます。

試しに $a_1=1$ としてみると，$a_2-a_2a_3+a_3=0$，すなわち

$a_2a_3-a_2-a_3=0$ という整数問題としてはオーソドックスな形になります。

$(a_2-1)(a_3-1)=1$ と変形し，$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ に注意すれば $(a_2,\ a_3)=(2,\ 2)$ を得ます。

これを皮切りに，$a_2a_3-ka_2-ka_3=0$ のように見て

「$a_1=k$ と固定すればオーソドックスな整数問題の形に帰着する」

ということを見抜ければ $(a_2-k)(a_3-k)=k^2$ と変形しておいて，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ のときをしらみつぶせばよいでしょう。

高々5通りですからたかが知れています。

解答では $=k$ とはおかずに，a_1 のまま記述していきます。

【解答】

(1) a_1，a_2，a_3 の値の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ としてあり得るのは 5^3 通りであり，これらは同様に確からしい。

そのうち $a_1<a_2<a_3$ となるような a_1，a_2，a_3 を決めるには 1，2，3，4，5 の5つの数字のから3つ選んで，小さい方から a_1，a_2，a_3 に対応させればよい。

ゆえに，$a_1<a_2<a_3$ となるような $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は ${}_5C_3=10$【通り】

求める確率は $\dfrac{10}{5^3}=\dfrac{2}{25}$ … 答

(2) 余事象である $(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\neq 0$ となる確率を求める。

$a_1\neq a_2$ かつ $a_2\neq a_3$ かつ $a_3\neq a_1$，すなわち

a_1，a_2，a_3 が全て相異なる

という事象が起こればよい。

そうなる $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の決め方は 1，2，3，4，5 の5つの数から3つ取り出して並べて，前から a_1，a_2，a_3 に対応させればよく ${}_5P_3=60$【通り】

ゆえに，$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\neq 0$ となる確率は $\dfrac{60}{5^3}=\dfrac{12}{25}$

したがって，$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)=0$ となる確率は

$$1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25} \cdots \text{答}$$

(3) $a_1a_2-a_2a_3+a_3a_1=0 \iff a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3=0$
$\iff (a_2-a_1)(a_3-a_1)=a_1{}^2 \cdots (*)$

(i) $a_1=1$ のとき

$(*)$ より $(a_2-1)(a_3-1)=1$

$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ より $0\leqq a_2-1\leqq 4$，$0\leqq a_3-1\leqq 4$

よって，$(a_2-1,\ a_3-1)=(1,\ 1)$，すなわち $(a_2,\ a_3)=(2,\ 2)$

(ii) $a_1=2$ のとき

$(*)$ より $(a_2-2)(a_3-2)=4$

$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ より $-1\leqq a_2-2\leqq 3$，$-1\leqq a_3-2\leqq 3$

よって，$(a_2-2,\ a_3-2)=(2,\ 2)$，すなわち $(a_2,\ a_3)=(4,\ 4)$

(iii) $a_1=3$ のとき

$(*)$ より $(a_2-3)(a_3-3)=9$

$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ より $-2\leqq a_2-3\leqq 2$，$-2\leqq a_3-3\leqq 2$

したがって，$(a_2-3)(a_3-3)=9$ を満たす $(a_2,\ a\ )$ はない。

(iv)　$a_1=4$ のとき

(*) より $(a_2-4)(a_3-4)=16$

$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ より $-3\leqq a_2-3\leqq 1$，$-3\leqq a_3-3\leqq 1$

したがって，$(a_2-4)(a_3-4)=16$ を満たす $(a_2,\ a_3)$ はない。

(v)　$a_1=5$ のとき

(*) より $(a_2-5)(a_3-5)=25$

$1\leqq a_2\leqq 5$，$1\leqq a_3\leqq 5$ より $-4\leqq a_2-5\leqq 0$，$-4\leqq a_3-5\leqq 0$

したがって，$(a_2-5)(a_3-5)=25$ を満たす $(a_2,\ a_3)$ はない。

以上 (i) ～ (v) より，題意を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の決め方は

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 4,\ 4)\ \text{の 2 通り}$$

これより求める確率は

$$\frac{2}{5^3}=\frac{2}{125}\ \cdots\ 答$$

【戦略 2】(2) について

余事象を考える部分は同じです。

1 回目は何でもよい

2 回目は 1 回目の番号以外

3 回目は 1 回目，2 回目の番号以外

と時系列で考えてもよいでしょう。

【解 2】(2) について

余事象である $(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\neq 0$ となる確率を求める。

1 回目は何でもよい

2 回目は 1 回目の番号以外

3 回目は 1 回目，2 回目の番号以外

を取ればよく，こうなる確率は $1\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

よって，$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)=0$ となる確率は

$$1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}\ \cdots\ 答$$

【総括】

(1)，(2) は定番の内容と言ってよく，単元学習や定期考査の段階でこそ差がつく内容ですが，入試の実戦レベルにおいて落とすことは許されません。

(1)，(2) については番号が拡張されるか，回数が拡張されるかという方向性は十分に考えられますので，一般的に聞かれたとしても対応できるようにしておきましょう。

(3) の等式は実験してみるとオーソドックスな整数問題の形になることに気がつけると思いますが，「オーソドックスな形と思えるかどうか」については経験がものを言います。

ただし，(3) 自体は記憶に頼るという態度ではなく，試行錯誤の結果，記憶が刺激されるというニュアンスに近いと思います。