$0<a<1$ のとき，負でない実数 x_1，x_2，…，x_n に対して，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_n{}^a$$

であることを証明せよ。

＜ '08 千葉大 ＞

【戦略】

登場する文字のうち， $\begin{cases} a\,,\, x_k \cdots \text{実数} \\ n \quad\ \ \cdots \text{自然数} \end{cases}$ **です。**

（n については問題文で自然数と書いておくべきですが，ここは空気を読んで自然数と捉えます。）

そこで，n に関する命題と見て「数学的帰納法」を選択します。

$n=1$ のときは明らかに成り立つので，問題ないでしょう。

$n=k$ $(k=1,2,\cdots,)$ のとき

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a$$

と仮定します。

このとき，

$(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a+x_{k+1}{}^a$ **が成立することを示すことになります。**

仮定を利用しようと思うと

$$\{(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}\}^a \leqq (x_1+x_2+\cdots+x_k)^a+x_{k+1}{}^a$$

とすれば帰納法の仮定から

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^a+x_{k+1}{}^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a+x_{k+1}{}^a$$

となり，解決するのですが，そのためには

$$(\bigcirc+\square)^a \leqq \bigcirc^a+\square^a$$

が成り立つことを示す必要があります。

つまり，$n=2$ のときの $(x_1+x_2)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$ を示す必要が出てくるわけです。

これについては「同次式」という特徴が目につきますので，そこから処理していこうと思います。

【解答】

$0<a<1$，$x_i \geqq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_n{}^a \quad \cdots (*)$$

が成立することを n についての数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$(*)$ の左辺 $=x_1{}^a$，$(*)$ の右辺 $=x_1{}^a$ となり，$(*)$ は成立する。

(ii)　$n=2$ のとき

示すべき不等式は $(x_1+x_2)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$ …(☆)

$x_1=0$，または $x_2=0$ のときは (i) のときと同じなので，成立する。

$x_1>0$，かつ $x_2>0$ のときは (☆) は $\left(\dfrac{x_1}{x_2}+1\right)^a \leqq \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^a+1$ と同値

ここで，$t=\dfrac{x_1}{x_2}$ とおくと，$(t+1)^a \leqq t^a+1$ …(★)

ゆえに，$t>0$ に対して (★) が成立することを証明すればよい。

$f(t)=t^a+1-(t+1)^a$ $(t>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= at^{a-1}-a\,(t+1)^{a-1} \\ &= a\left\{t^{a-1}-(t+1)^{a-1}\right\} \\ &= a\left(\frac{1}{t^{1-a}}-\frac{1}{(t+1)^{1-a}}\right) \end{aligned}$$

ここで，$0<a<1$ より，$0<t^{1-a}<(t+1)^{1-a}$ であり，$\dfrac{1}{t^{1-a}}>\dfrac{1}{(t+1)^{1-a}}$

ゆえに，$f'(t)>0$ であり，$f(t)$ は $t>0$ の範囲で単調増加

したがって，$f(t)>f(0)=0^a+1-1^a=0$ であるため，(★) が成立する

以上から，$n=2$ のときも $(*)$ は成立する。

(iii)　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a$$

が成立すると仮定する。

このとき，

$$\begin{aligned} \{(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}\}^a &\leqq (x_1+x_2+\cdots+x_k)^a+x_{k+1}{}^a \quad (\text{(ii) の結果}) \\ &\leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a+x_{k+1}{}^a \quad (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

となり，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a+\cdots+x_k{}^a+x_{k+1}{}^a$$

が成立し，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する。

以上から，題意は示された。

【戦略 2】

$n=2$ のときの $(x_1+x_2)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$ を示すにあたっての別解です。

正直，試験場での再現性はないと言ってしまってもよいかもしれませんが，同次式に頼らない方針で解くとなると … という一つの例として参考にしてくれればと思います。

【解 2】部分的別解

(ii)　$n=2$ のとき

$(x_1+x_2)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$ であることを示すにあたって

対称性から $x_1 \geqq x_2$ として考えても一般性を失わない。

x_1, x_2 は 0 以上の値なので，$x_1{}^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$

両辺 $1-a$ 乗して $x_1{}^{a(1-a)} \leqq (x_1{}^a+x_2{}^a)^{1-a}$

両辺に $(x_1{}^a+x_2{}^a)^a$ をかけると

$x_1{}^{a(1-a)} \cdot (x_1{}^a+x_2{}^a)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$

$\{x_1{}^{1-a}(x_1{}^a+x_2{}^a)\}^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$

ここで，$x_1{}^{1-a}(x_1{}^a+x_2{}^a)=x_1+x_1{}^{1-a}x_2{}^a$
$\geqq x_1+x_2{}^{1-a}x_2{}^a$
$=x_1+x_2$

この一連の流れは類題の経験がないと正直キツイと思います。

ゆえに，$(x_1+x_2)^a \leqq x_1{}^a+x_2{}^a$

【総括】

色々変なことを考えて泥沼に嵌まってしまいかねません。

数学的帰納法という方針はすぐにたつと思います。

$n=k$ のときから $n=k+1$ のときの橋渡しの際にカギとなる $n=2$ のときの証明が割と苦労するかもしれません。

最初は凸性を利用して証明することも考えましたが

$f(x)=x^a$ $(x \geqq 0)$ に対し，$f'(x)=ax^{a-1}$，$f''(x)=a(a-1)x^{a-2}$

ということで $f'(x) \geqq 0$，$f''(x) \leqq 0$ を得るため，$y=f(x)$ は $x \geqq 0$ の範囲で上に凸の単調増加関数です。

これにより，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqq f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，すなわち

$$\frac{x_1{}^a+x_2{}^a}{2} \leqq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^a$$

で，ここから $2^{a-1}(x_1{}^a+x_2{}^a) \leqq (x_1+x_2)^a$ が得られます。

$(x_1+x_2)^a \leqq \boxed{}$ という向きに評価したかったのですが，逆向きに評価されてしまいました。

そこからのリカバリー策として，同次式であることに目をつければ，それを活かして証明しきることはそれほど大変ではないかもしれませんが，気が付かないと結構苦労するでしょう。

ちなみに，【解 2】の発想のもととなった問題は以下の問題です。

【類題】
　x, y を任意の正の数とし，p, q を

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{ かつ } p>1,\ q>1$$

を満たす有理数とする。
　必要ならば $x=x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}}$ 等を用いて，次の不等式

$$(x+y)^{\frac{1}{p}}<x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}$$

を示せ。

< '97 早稲田大　一部省略 >

【類題 戦略】

問題の概要は

　$x>0$, $y>0$, $p>1$ に対して

$$(x+y)^{\frac{1}{p}}<x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}$$

　を示せ。

ということであり，q は不要なはずです。

敢えて $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ という設定や，「必要ならば $x=x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}}$ 等を用いて」というヒントがご親切にあるわけですから，それを存分に活かすように式変形していきたいところです。

【解答例】

対称性から $x \geqq y>0$ として考えても一般性を失わない。

$x \geqq y>0$ かつ $p>1$ であるから，$x^{\frac{1}{p}}<x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}$

この両辺を $\dfrac{1}{q}$ 乗すると，$x^{\frac{1}{pq}}<\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$

ヒントがなかったらキツイのでは … ？

両辺に $\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}$ をかけると $x^{\frac{1}{pq}} \cdot \left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}<\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$

よって，$\left\{x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}<x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}$　… ①　$\left(\because\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$

ここで，

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right) &= x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+x^{\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{p}} \\ &\geqq x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+y^{\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{p}} \\ &= x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\ &= x+y \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より，$(x+y)^{\frac{1}{p}}<x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}$ が成立する。