【復習用問題２】

さいころを続けて投げて，数直線上の点Ｐを移動させるゲームを行う。初め点Ｐは原点０にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点Ｐを現在の位置から正の向きに移動させる。

この試行を続けて行い，点Ｐが10に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9$ であることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。

＜ ’17 北海道大 ＞

【戦略】

k 回目に出た目の数を a_k，k 回目の試行を終えたときの点Ｐの座標を x_k としておきます。

$x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k \geqq k$ なので，k 回サイコロを振ったら最低でも座標 k の位置にはいるわけです。

(1) は９回振ったら９以上の場所にいることになります。

つまり，そもそも10回目の試行があり得るためには

９回目に座標９の位置にいる

ことが必要になるわけで，それはすなわち１回目から９回目まで 全部１が出るということになります。

(2) は $x_8 \geqq 8$ であることを考えると，９回目の試行が行われるためには

$x_8=8$ または 9

となるしかありません。

$x_8=8$ は１回目から８回目まですべて１が出るという厳しい条件です。

$x_8=9$ は１回目から８回目まで基本的には１が出るが

「１回だけ２の目が出ることも許される」

という条件です。（許されるというか１回は出なきゃダメです。）

(3) は，(a_1, a_2, a_3) を決めるにあたり，単純に数字を決めて並べ替えるというわけにもいきません。

例えば $a_1+a_2+a_3=15$ となる場合

$6+6+3$ (の並べ替え)，$6+5+4$ (の並べ替え)，$5+5+5$

が考えられて，$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$ 【通り】とやることができません。

なぜなら，$(a_1, a_2, a_3)=(6, 6, 3)$ は a_1+a_2 の時点で10を超えておりゲームが終わってしまっているからです。

もちろん，その他の $(5, 5, 5)$ なども２回目の段階でゲームは終了してしまっています。

つまり $\begin{cases} 4 \leqq a_1+a_2 \leqq 9 & (\leftarrow 4 \text{ **以上でないと** } 3 \text{ **回目に終われません** }) \\ a_1+a_2+a_3 \geqq 10 \end{cases}$

という条件を考える必要があるわけです。

この処理については $a_1+a_2=k$ などと固定して，a_3 の決め方を考えていきます。

【解答】

k 回目に出た目の数を a_k とする。

k 回目の試行を終えたときの点Ｐの座標を x_k とする。

(1) $x_9=a_1+a_2+\cdots+a_9 \geqq 1+1+\cdots+1=9$

等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_9=1$ のときに限る。

つまり，a_1，a_2，…，a_9 の中に２以上の数があると等号が成立しないため，$x_9 \geqq 10$ となってしまい，10回目の試行前にこのゲームが終了してしまう。

よって，

$(a_1, a_2, \cdots, a_{10})=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, m)$

（m は１，２，３，４，５，６ の何でもよい）

となる確率が p_{10} であり，$p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9$ である。

(2) $x_8=a_1+a_2+\cdots+a_8 \geqq 8$

(i) $x_8=8$ のとき

こうなる確率は $a_1 \sim a_8$ が全て１となる確率で $\left(\frac{1}{6}\right)^8$

このとき，a_9 は２以上であればよく，その確率は $\frac{5}{6}$

よって，ゲームが終了する確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \frac{5}{6}=\frac{5}{6^9}$

(ii) $x_8=9$ のとき

こうなる確率は $a_1 \sim a_8$ のうちどれか１つが２となり，

残りは全て１となる確率で，$\left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot 8$

このとき，９回目の目 a_9 は何でもよい。

よってゲームが終了する確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot 8 \cdot 1=\frac{8}{6^8}$

以上 (i)，(ii) から $p_9=\frac{5}{6^9}+\frac{8}{6^8}=\frac{53}{6^9}$ …答

(3) $\begin{cases} 4 \leqq a_1 + a_2 \leqq 9 & \cdots ① \\ a_1 + a_2 + a_3 \geqq 10 & \cdots ② \end{cases}$ となるような (a_1, a_2, a_3) の決め方を

求める。

$a_1 + a_2 = k$（$k = 4, 5, \cdots, 9$）と固定する。

このとき，② から $k + a_3 \geqq 10$

$a_3 \leqq 6$ も考えると，$10 - k \leqq a_3 \leqq 6$

これを満たす a_3 の決め方は $6 - (10 - k) + 1 = k - 3$ 【通り】

$k = 4$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ で，a_3 の決め方は 1 通り

$k = 5$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ で，a_3 の決め方は 2 通り

$k = 6$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ で，
a_3 の決め方は 3 通り

$k = 7$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ で，
a_3 の決め方は 4 通り

$k = 8$ のとき
$(a_1, a_2) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ で，
a_3 の決め方は 5 通り

$k = 9$ のとき
$(a_1, a_2) = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ で，a_3 の決め方は 6 通り

以上から (a_1, a_2, a_3) の決め方は

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 99 \text{【通り】}$$

ゆえに，$p_3 = \dfrac{99}{6^3} = \dfrac{11}{24}$ … 答

【復習用問題２　総括】

同じ双六でも少しルールを変えただけで全然勝手が違いますね。

(3) は余事象などを考えても事故る可能性が高いでしょう。

「３回目で試行が終了する」の余事象は単純に $x_3 \leqq 9$ ではなく

「3 回目の試行が行われ，$x_3 \leqq 9$」
または
3 回目の試行が行われない

ということになります。

この方針でもやってみましたが，一応できなくはありませんでした。

「3 回目の試行が行われ，$x_3 \leqq 9$」となる (a_1, a_2, a_3) としては

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 1, 4), (1, 2, 3)$
$(2, 2, 2), (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3), (1, 1, 6)$
$(1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5)$
$(1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$

の並べ替えの数だけ決め方があります。

$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ の並べ替え方は 1 通りです.

(○，○，△) や (○，△，△) のタイプは $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通りの並べ方があり

(○，△，□) のタイプは $3!$ 通りの並べ方があるので

$$3 + 12 \cdot \frac{3!}{2!} + 7 \cdot 3! = 81 \text{【通り】}$$

さらに，3 回目の試行が行われないようなものについて

$(a_1, a_2, a_3) = (4, 6, □), (5, 5, □), (6, 4, □), (5, 6, □)$
$(6, 5, □), (6, 6, □)$

という $6 \times 6 = 36$ 【通り】があるため

$$\frac{81 + 36}{6^3} = \frac{117}{216}$$

が余事象の確率となり，これを 1 から引くことで

$p_3 = 1 - \dfrac{117}{216} = \dfrac{11}{24}$ と得ることもできます。