【復習用問題】

点 P が次のルール (i), (ii) に従って数直線上を移動するものとする。

(i) 1，2，3，4，5，6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。
P の座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii) 原点に移動したら終了し，そうでなければ (i) を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P の座標が 1，2，……，6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2) P の座標が 1，2，……，6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3) P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

＜ ’08 東北大 ＞

【戦略】

(1)，(2) **は最初からリーチゾーンにいるので，**

毎回毎回 $\frac{1}{6}$ でゴールするか $\frac{5}{6}$ でリーチ状態を継続するか

という選択になり，非常に分かりやすいでしょう。

(3) **は先ほど扱った名古屋大学の問題と同じ問題です。**

1 **回目が** 1 **かどうかで場合分けをします。**

【解答】

集合 $\{-6，-5，-4，-3，-2，-1，1，2，3，4，5，6\}$ を A とする。

k 回目の目が出たときの動点のいる座標を x_k と呼ぶ。
（スタート地点の座標は x_0 とみなす。）

$x_k \in A$ であるとき

$$\begin{cases} 確率\ \frac{1}{6}\ でゴールする\ \cdots\ 事象\ G\ と呼ぶ \\ \\ 確率\ \frac{5}{6}\ で\ x_{k+1} \in A\ となる\ \cdots\ 事象\ \overline{G}\ と呼ぶ \end{cases}$$

であることに注意する。

(1) $x_0 \in A$ なので，1 回目，2 回目は $\overline{G}$ が起こり，3 回目には G が起こる。

よって，求める確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ …答

(2) $x_0 \in A$ なので，1 回目から $m-1$ 回目までの $m-1$ 回は $\overline{G}$ が起こり，m 回目には G が起こる。

よって，求める確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{m-1}}{6^m}$ …答

(3) (Ⅰ) 1 回目に 1 が出るとき

2 回目には何が出ても $x_2 \in A$ であり，

3 回目から $n-1$ 回目までの $n-3$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目は事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{n-3}}{6^{n-1}}$$

(Ⅱ) 1 回目に m が出るとき（$m=2，3，\cdots，6$）

$x_1 \in A$ である。

2 回目から $n-1$ 回目までの $n-2$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目には事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5^{n-3}}{6^{n-1}} + \frac{5^{n-1}}{6^n} \\ &= \frac{6 \cdot 5^{n-3} + 5^{n-1}}{6^n} \ \cdots 答 \end{aligned}$$