サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。

たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

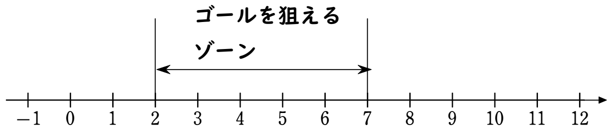
(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

＜ ’04 名古屋大 ＞

【戦略】

(1)　**2 回の目の出方は** (2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) **と直接数え上げられるため，特に問題ないでしょう。**

(2)　**このあたりから，最後のオチに向けた考え方を意識するべきです。**



というイメージをもっておきたいところです。

上のゾーンにいるいわゆる「リーチ」状態では

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}\ \text{でゴール} \\ \dfrac{5}{6}\ \text{で再びリーチ} \end{cases}$$

の繰り返しです。

そうなると，1 回目に 1 が出るかどうかが気になります。
（気になりませんか？）

したがって，1 回目に 1 が出るかどうかで場合分けをします。

今はカジュアルな言葉遣いで考えていますが，答案ではもう少しフォーマルな記述をします。

(3)　**(2) の考え方を一般的に文字でやるだけです。**

もちろん 1 回目に 1 が出るかどうかという注意点は継続して考えます。

【解答】

(1)　k 回目に出た目の数を a_k とする。

$a_1+a_2=8$ となればよく

$(a_1,\ a_2)=(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

$(a_1,\ a_2)$ の値の取り得る場合の総数は 6^2 通りで，これらは同様に確からしい

ゆえに，求める確率は $p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$ …答

(2)　k 回目の目が出たときの動点のいる座標を x_k と呼ぶ。

また，集合 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ を A とする。

【戦略】でいう
ゴールゾーン

(i)　1 回目に 1 が出るとき

$a_2+a_3=7$ となればよく

$(a_2,\ a_3)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$ の 6 通り

よって，このとき，3 回目に終わる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{36}=\frac{1}{36}$$

(ii)　1 回目に m が出るとき（$m=2,\ 3,\ \cdots,\ 6$）

$x_k\in A$ であるとき

$$\begin{cases} \text{確率}\ \dfrac{1}{6}\ \text{で ゴールする … 事象}\ G\ \text{と呼ぶ} \\ \\ \text{確率}\ \dfrac{5}{6}\ \text{で}\ x_{k+1}\in A\ \text{となる … 事象}\ \overline{G}\ \text{と呼ぶ} \end{cases}$$

2 回目は事象 $\overline{G}$ が起こり，3 回目は事象 G が起こる。

よって，このとき，3 回目に終わる確率は

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

(i)，(ii) より，$p_3=\dfrac{1}{36}+\dfrac{25}{216}=\dfrac{31}{216}$ …答

(3)　（Ⅰ）　1 回目に 1 が出るとき

2 回目には何が出ても $x_2\in A$ であり，

3 回目から $n-1$ 回目までの $n-3$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目は事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^{n-3}}{6^{n-1}}$$

(Ⅱ) 1回目に m が出るとき ($m=2, 3, \cdots, 6$)

$x_1 \in A$ である。

2回目から $n-1$ 回目までの $n-2$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目には事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^{n-1}}{6^n}$$

(Ⅰ), (Ⅱ) より，

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5^{n-3}}{6^{n-1}}+\frac{5^{n-1}}{6^n} \\ &= \frac{6\cdot 5^{n-3}+5^{n-1}}{6^n} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

【総括】

自分の立ち位置に応じて「所望の目」が出るかどうかでゴールできるかどうかが決まります。

つまり 毎回毎回 $\begin{cases} \dfrac{1}{6}\ \text{でゴールできる} \\ \\ \dfrac{5}{6}\ \text{でリーチ状態が継続する} \end{cases}$ のいずれかが起きる

というように噛み砕けるかが勝負です。

自分がこのゲームの「当事者」になったつもりで考えると分かりやすいと思います。

難関大では有名ゲームをモデル化した問題が出題されることも多く，今回の「双六」についても類題が多数あります。

復習用問題として何題かおいておきますので，ご活用ください。

【復習用問題】

点 P が次のルール (i), (ii) に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1，2，3，4，5，6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。
Pの座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ (i) を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　Pの座標が 1，2，……，6 のいずれかであるとき，ちょうど3回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　Pの座標が 1，2，……，6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　Pの座標が8であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

＜ '08 東北大 ＞

【戦略】

(1)，(2) **は最初からリーチゾーンにいるので，**

毎回毎回 $\dfrac{1}{6}$ でゴールするか $\dfrac{5}{6}$ でリーチ状態を継続するか

という選択になり，非常に分かりやすいでしょう。

(3) **は先ほど扱った名古屋大学の問題と同じ問題です。**

1 **回目が** 1 **かどうかで場合分けをします。**

【解答】

集合 $\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6\}$ を A とする。

k 回目の目が出たときの動点のいる座標を x_k と呼ぶ。
（スタート地点の座標は x_0 とみなす。）

$x_k \in A$ であるとき

$$\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{6} \text{ で ゴールする } \cdots \text{ 事象 } G \text{ と呼ぶ} \\[2ex] \text{確率 } \dfrac{5}{6} \text{ で } x_{k+1} \in A \text{ となる } \cdots \text{ 事象 } \overline{G} \text{ と呼ぶ} \end{cases}$$

であることに注意する。

(1)　$x_0 \in A$ なので，1回目，2回目は $\overline{G}$ が起こり，3回目には G が起こる。

よって，求める確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{216}$ … 答

(2)　$x_0 \in A$ なので，1回目から $m-1$ 回目までの $m-1$ 回は $\overline{G}$ が起こり，m 回目には G が起こる。

よって，求める確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5^{m-1}}{6^m}$ … 答

(3)　（Ⅰ）　1回目に1が出るとき

2回目には何が出ても $x_2 \in A$ であり，

3回目から $n-1$ 回目までの $n-3$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目は事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{n-3}}{6^{n-1}}$$

（Ⅱ）　1回目に m が出るとき（$m=2,3,\cdots,6$）

$x_1 \in A$ である。

2回目から $n-1$ 回目までの $n-2$ 回は事象 $\overline{G}$ が起こり，
n 回目には事象 G が起こる。

よって，このとき n 回目で終わる確率は

$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

（Ⅰ），（Ⅱ）より，

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5^{n-3}}{6^{n-1}} + \frac{5^{n-1}}{6^n} \\ &= \frac{6 \cdot 5^{n-3} + 5^{n-1}}{6^n} \end{aligned}$$ … 答

【復習用問題２】

さいころを続けて投げて，数直線上の点Ｐを移動させるゲームを行う。初め点Ｐは原点０にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点Ｐを現在の位置から正の向きに移動させる。

この試行を続けて行い，点Ｐが10に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1)　$p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ であることを示せ。

(2)　p_9 の値を求めよ。

(3)　p_3 の値を求めよ。

＜ '17 北海道大 ＞

【戦略】

k 回目に出た目の数を a_k，k 回目の試行を終えたときの点Ｐの座標を x_k としておきます。

$x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k\geqq k$ なので，k 回サイコロを振ったら最低でも座標 k の位置にはいるわけです。

(1) は９回振ったら９以上の場所にいることになります。

つまり，そもそも10回目の試行があり得るためには

９回目に座標９の位置にいる

ことが必要になるわけで，それはすなわち１回目から９回目まで 全部１が出るということになります。

(2) は $x_8\geqq 8$ であることを考えると，９回目の試行が行われるためには

$x_8=8$ または９

となるしかありません。

$x_8=8$ は１回目から８回目まですべて１が出るという厳しい条件です。

$x_8=9$ は１回目から８回目まで基本的には１が出るが

「１回だけ２の目が出ることも許される」

という条件です。（許されるというか１回は出なきゃダメです。）

(3) は，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を決めるにあたり，単純に数字を決めて並べ替えるというわけにもいきません。

例えば $a_1+a_2+a_3=15$ となる場合

$6+6+3$ (の並べ替え)，$6+5+4$ (の並べ替え)，$5+5+5$

が考えられて，$\dfrac{3!}{2!}+3!+1=10$ 【通り】とやることができません。

なぜなら，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(6,\ 6,\ 3)$ は a_1+a_2 の時点で10を超えておりゲームが終わってしまっているからです。

もちろん，その他の $(5,\ 5,\ 5)$ なども２回目の段階でゲームは終了してしまっています。

つまり $\begin{cases} 4\leqq a_1+a_2\leqq 9 & (\leftarrow 4\text{ 以上でないと }3\text{ 回目に終われません}) \\ a_1+a_2+a_3\geqq 10 \end{cases}$

という条件を考える必要があるわけです。

これについては $a_1+a_2=k$ などと固定して，a_3 の決め方を考えていきます。

【解答】

k 回目に出た目の数を a_k とする。

k 回目の試行を終えたときの点Ｐの座標を x_k とする。

(1)　$x_9=a_1+a_2+\cdots+a_9\geqq 1+1+\cdots+1=9$

等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_9=1$ のときに限る。

つまり，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_9$ の中に２以上の数があると等号が成立しないため，$x_9\geqq 10$ となってしまい，10回目の試行前にこのゲームが終了してしまう。

よって，

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10})=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ m)$

（m は $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の何でもよい）

となる確率が p_{10} であり，$p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ である。

(2)　$x_8=a_1+a_2+\cdots+a_8\geqq 8$

(i)　$x_8=8$ のとき

こうなる確率は $a_1\sim a_8$ が全て１となる確率で $\left(\dfrac{1}{6}\right)^8$

このとき，a_9 は２以上であればよく，その確率は $\dfrac{5}{6}$

よって，ゲームが終了する確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^8\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6^9}$

(ii)　$x_8=9$ のとき

こうなる確率は $a_1\sim a_8$ のうちどれか１つが２となり，

残りは全て１となる確率で，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^8\cdot 8$

このとき，９回目の目 a_9 は何でもよい。

よってゲームが終了する確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^8\cdot 8\cdot 1=\dfrac{8}{6^8}$

以上 (i)，(ii) から $p_9=\dfrac{5}{6^9}+\dfrac{8}{6^8}=\dfrac{53}{6^9}$ …答

(3) $\begin{cases} 4 \leqq a_1 + a_2 \leqq 9 & \cdots ① \\ a_1 + a_2 + a_3 \geqq 10 & \cdots ② \end{cases}$ となるような (a_1, a_2, a_3) の決め方を

求める。

$a_1 + a_2 = k$ ($k = 4, 5, \cdots, 9$) と固定する。

このとき, ② から $k + a_3 \geqq 10$

$a_3 \leqq 6$ も考えると, $10 - k \leqq a_3 \leqq 6$

これを満たす a_3 の決め方は $6 - (10 - k) + 1 = k - 3$ 【通り】

$k = 4$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ で, a_3 の決め方は 1 通り

$k = 5$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ で, a_3 の決め方は 2 通り

$k = 6$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ で,
a_3 の決め方は 3 通り

$k = 7$ のとき
$(a_1, a_2) = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ で,
a_3 の決め方は 4 通り

$k = 8$ のとき
$(a_1, a_2) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ で,
a_3 の決め方は 5 通り

$k = 9$ のとき
$(a_1, a_2) = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ で, a_3 の決め方は 6 通り

以上から (a_1, a_2, a_3) の決め方は

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 99 \text{【通り】}$$

ゆえに, $p_3 = \dfrac{99}{6^3} = \dfrac{11}{24}$ … 答

【復習用問題 2　総括】

同じ双六でも少しルールを変えただけで全然勝手が違いますね。

(3) は余事象などを考えても事故る可能性が高いでしょう。

「3 回目で試行が終了する」の余事象は単純に $x_3 \leqq 9$ ではなく

「3 回目の試行が行われ, $x_3 \leqq 9$」
または
3 回目の試行が行われない

ということになります。

この方針でもやってみましたが, 一応できなくはありませんでした。

「3 回目の試行が行われ, $x_3 \leqq 9$」となる (a_1, a_2, a_3) としては

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 1, 4), (1, 2, 3)$
$(2, 2, 2), (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3), (1, 1, 6)$
$(1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5)$
$(1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$

の並べ替えの数だけ決め方があります。

$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ の並べ替え方は 1 通りです.

$(○, ○, △)$ や $(○, △, △)$ のタイプは $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通りの並べ方があり

$(○, △, □)$ のタイプは $3!$ 通りの並べ方があるので

$$3 + 12 \cdot \frac{3!}{2!} + 7 \cdot 3! = 81 \text{【通り】}$$

さらに, 3 回目の試行が行われないようなものについて

$(a_1, a_2, a_3) = (4, 6, □), (5, 5, □), (6, 4, □), (5, 6, □)$
$(6, 5, □), (6, 6, □)$

という $6 \times 6 = 36$ 【通り】があるため

$$\frac{81 + 36}{6^3} = \frac{117}{216}$$

が余事象の確率となり, これを 1 から引くことで

$p_3 = 1 - \dfrac{117}{216} = \dfrac{11}{24}$ と得ることもできます。