円 $x^2+y^2=1$ を C_0，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0\,,\ b>0)$ を C_1 とする。

C_1 上のどんな点 P に対しても，P を頂点にもち，C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a，b で表せ。

＜ ’90 東京大 ＞

【戦略 1】

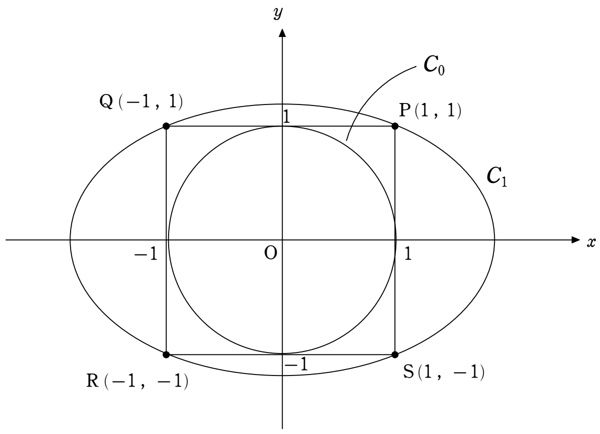
「どんな点 P に対しても …」という部分に目を付けて，全称命題と捉えていければ道が拓けるでしょう。

そこをクリアーできれば $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ という必要条件を得る部分まではスムーズに流れていくと思います。

ただ，十分性の確認についてはかなりのスタミナが要求されます。

題意の平行四辺形が実は菱形であることを見抜く必要があり，さらにそこから息の長い計算を強いられます。

【解答】



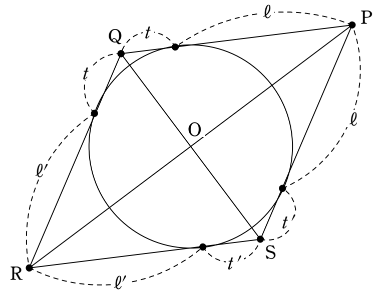
(図 1)

(図 1) のようになることが必要ある。

すなわち，P(1, 1) が C_1 上にあることが必要で，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ が題意を満たす必要条件である。

逆に $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ を満たすとき C_1 上のどんな点 P に対しても題意の平行四辺形 PQRS が存在することを示す。

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ のとき，$a>1$，$b>1$



(図 2)

(図 2) の平行四辺形 PQRS において，$\begin{cases} \ell+t=\ell'+t' \\ \ell+t'=\ell'+t \end{cases}$ が成り立ち，これら 2 式から

$$\ell=\ell',\ t=t'$$

を得る。

つまり，この平行四辺形は菱形である。… (∗)

O はこの菱形の対角線の交点ゆえ，$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$，$\mathrm{R}(-\alpha,\ -\beta)$ とおける。

$\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ で，(∗) より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}\ (k\text{ は実数})$$

とおける。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-k\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$

以上から，

$$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta),\ \mathrm{Q}(-k\beta,\ k\alpha),\ \mathrm{R}(-\alpha,\ -\beta),\ \mathrm{S}(k\beta,\ -k\alpha)$$

となる。

$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が C_1 上にあるとき，点 P の位置に関わらず残り 3 点が C_1 上に存在することを示せばよい。

P が C_1 上にあるとき，$\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$ であり，$\dfrac{(-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(-\beta)^2}{b^2}=1$ も満たされるので R も C_1 上の点である。

同様に Q が C_1 上にあるとき，S も C_1 上にあることが言える。

これより，

$$\mathrm{P}\text{ が }C_1\text{ 上}\Longrightarrow\mathrm{Q}\text{ が }C_1\text{ 上}$$

が言えれば，$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が C_1 上にあるとき，点 P の位置に関わらず残り 3 点が C_1 上に存在することが言える。

したがって

$\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$ … ① を満たす任意の $(\alpha,\ \beta)$ に対して，

$$\frac{k^2\beta^2}{a^2}+\frac{k^2\alpha^2}{b^2}=1$$

となるような実数 k が存在することを示せばよい。

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\ (a>1,\ b>1)$ より，① は $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\beta^2\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)=1$，すなわち

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2}+\beta^2=1\ \cdots(☆)$$

今

$$\begin{aligned}\frac{k^2\beta^2}{a^2}+\frac{k^2\alpha^2}{b^2}&=k^2\left(\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}\right)\\&=k^2\left\{\frac{\beta^2}{a^2}+\alpha^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right\}\\&=k^2\left\{\frac{\beta^2-\alpha^2}{a^2}+\alpha^2\right\}\\&=k^2\left\{(\beta^2-1)+\alpha^2\right\}\quad(\because(☆))\\&=k^2(\alpha^2+\beta^2-1)\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{k^2\beta^2}{a^2}+\dfrac{k^2\alpha^2}{b^2}=1$ を満たす実数 k が存在することを示すには

$k^2(\alpha^2+\beta^2-1)=1$ を満たす実数 k が存在することを言えばよい。

今，$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は C_0 の外部の点であるから，$x^2+y^2-1>0$ の領域にあり，

$\alpha^2+\beta^2-1>0$ を満たしている。

ゆえに，$k^2=\dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2-1}$（$>0$）より，これを満たす実数 k は存在する。

以上から求める必要十分条件は $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ …答

【戦略 2】

問題文では外側が楕円で内側が円という構図ですが，座標の倍率を変換して題意を言い換えてみます。

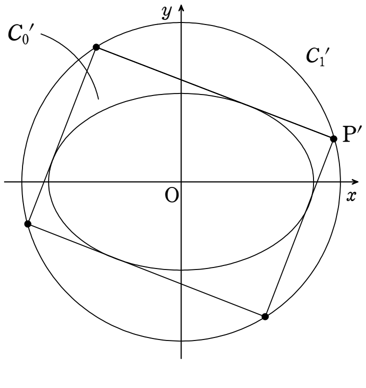
原点中心に x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍，y 軸方向に $\dfrac{1}{b}$ 倍して考えてみると，

$$C_0\ \rightarrow\ C_0'\ :\ a^2x^2+b^2y^2=1\ ,\quad C_1\ \rightarrow\ C_1'\ :\ x^2+y^2=1$$

であり，外側が円，内側が楕円となり，定番の「準円」の問題に帰着します。（下の図を参照）

ただし，計算量は多く，根気強さが必要です。

楕円の問題では「円に戻せ」という格言に沿った方針です。



【解 2】

原点中心に x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍，y 軸方向に $\dfrac{1}{b}$ 倍して考えると

$$C_0\ \rightarrow\ C_0'\ :\ a^2x^2+b^2y^2=1$$

$$C_1\ \rightarrow\ C_1'\ :\ x^2+y^2=1$$

このとき，この倍率による変換によって，平行四辺形は平行四辺形に，交点は交点に，接点は接点に移るので

C_1' 上の任意の点 P′ に対しても P′ を頂点にもち，C_0' に外接し，C_1' に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を求めればよい。

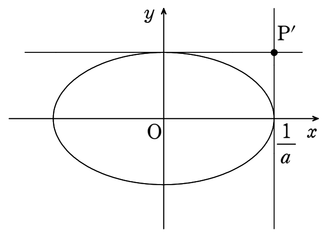
円 C_1' に内接する平行四辺形は長方形である。

点 P′ から楕円 C_0' に引いた 2 本の接線が直交するような P′ の軌跡を考える。

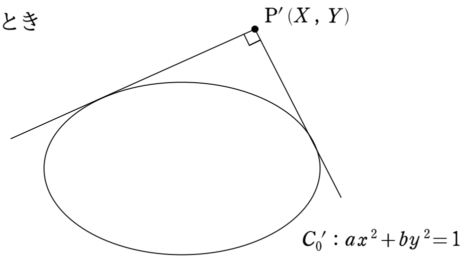
$\mathrm{P}'(X,\ Y)$ とする。

(i) $X=\pm\dfrac{1}{a}$ のとき

$Y=\pm\dfrac{1}{b}$（複号任意）



(ii) $X\neq\pm\dfrac{1}{a}$ のとき



この接線は $y=m(x-X)+Y$ とおける。

$a^2x^2+b^2y^2=1$ と連立して，$ax^2+b^2\{m(x-X)+Y^2\}=1$

整理すると $(a^2+b^2m^2)x^2-2b^2m(mX-Y)x+b^2(mX-Y)^2-1=0$

この x についての 2 次方程式がが重解をもつので，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=b^4m^2(mX-Y)^2-(a^2+b^2m^2)\{b^2(mX-Y)^2-1\}=0$$

m について整理すると

$$b^2(1-a^2X^2)m^2+2a^2b^2XYm+a^2(1-b^2Y^2)=0$$

これが相異なる 2 つの実数解 $m_1,\ m_2$ をもつためには，判別式を D' として

$$\frac{D'}{4}=(a^2b^2XY)^2-b^2(1-a^2X^2)a^2(1-b^2Y^2)>0$$

整理すると $a^2X^2+b^2Y^2>1$

これは $\mathrm{P}'(X,\ Y)$ が C_0' の外部の点であることから成立する。

ゆえ，残る条件は 2 接線が直交する条件であり，$m_1m_2=-1$

解と係数の関係から，$m_1m_2=\dfrac{a^2(1-b^2Y^2)}{b^2(1-a^2X^2)}$

すなわち，$\dfrac{a^2(1-b^2Y^2)}{b^2(1-a^2X^2)}=-1$ で整理すると，

$$X^2+Y^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ \left(X\neq\pm\frac{1}{a}\right)$$

ただし，これは (i) のときも成立する．

以上より

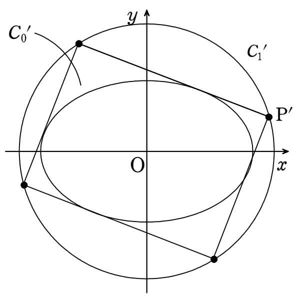
P′ から $C_0{}'$ に引いた 2 本の接線が直交するような P′ の軌跡は

$$\text{円}\ x^2+y^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

これが，$C_1{}'$： $x^2+y^2=1$ であればよく，求める必要十分条件は

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\ \cdots\ \text{答}$$

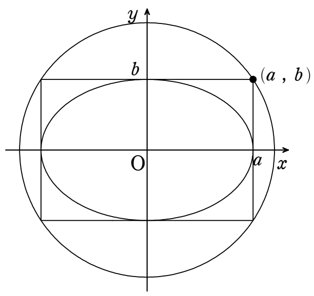
補足



楕円の直交 2 接線の交点 P の軌跡は円となり，「準円」と呼ばれます。

円になることが分かっているならば，原点が中心であることは分かるため，後は半径を求めるだけです。

一般に，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の準円 $x^2+y^2=r^2$ について考えると



$(a\ ,\ b)$ が準円上なので，$r^2=a^2+b^2$ を得ます。

したがって，準円の方程式は $x^2+y^2=a^2+b^2$ ということになります。

つまり，今回の【解 2】で現れた楕円 $a^2x^2+b^2y^2=1$ の準円の方程式が

$x^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ となることは，勉強している人から見れば予見できることと言えましょう。（前面に押し出すのは危険なので，あくまで検算用）

【総括】

今は全称命題というトピックスを学ぶ例題として本問を扱っていますから頭が「全称命題モード」になっているでしょうが，試験場で色々な問題に紛れて本問がポンとおいてあった場合，スムーズにいくかどうかが問題です。

そういった観点から言えば，必要条件である $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ にたどり着くだけでも，試験場では結構なアドバンテージではないかと思います。

その後の十分性の確認においてもかなりのスタミナが要求されます。

「何が言えればよいのか」ということをその都度確認しながら進めていかないと迷子になってしまいかねません。

【解 2】の座標の倍率変換によって楕円を円に戻す方針は，同時に円は楕円になってしまいますから，一見すると意味がないように思えますが，構図的に準円の構図となります。

ただ，準円に関する確かな経験と知識がないと，自信をもって手を進めることができないかもしれませんので，上級者用の解答だと言えましょう。

試験場においては本問ができなくても大きく差がつくことはないでしょうが，勉強になる要素は沢山含んでいますので，ぜひ何度も読み返して吸収していただければと思います。

ちなみに

参考　ポンスレの閉形定理
2 つの 2 次曲線 C_0，C_1 と 3 以上の自然数 n について C_1 上のある点を 1 つの頂点として C_0 に外接し，C_1 に内接する n 角形が 1 つでも存在すれば，任意の点についてそれを 1 つの頂点とする同様の n 角形が存在する。

本問はこの定理を背景にしています。

この一般論の証明は難解ですが，このような特殊論としてネタにされることは難関大では過去に度々あるようです。（だからといってこの定理を覚える必要はありません）

実践演習の方でこの定理が背景にある問題を扱ってますので，そちらもチェックしてみてください。