$0<a\leqq b\leqq 1$ を満たす有理数 a，b に対し，$f(n)=an^3+bn$ とおく。このとき，どのような整数 n に対しても $f(n)$ は整数となり，n が偶数ならば $f(n)$ も偶数となるような a，b の組を全て求めよ。

＜ '91 金沢大 ＞

【戦略】

全称命題であるということを見落としたくありません。

まずは，f(整数)$=$(整数) という部分に注目します。

「$f(1)$ が整数である必要があるよね」

と屁理屈を言います。

すると，$f(1)=a+b$ が整数であるということになります。

a，b は範囲が限られていますから，範囲を絞ると $0<a+b\leqq 2$ を得て

$$a+b=1,\ 2$$

と絞られます。

$a+b=2$ のときは $0<a\leqq 1$，$0<b\leqq 1$ より $a=b=1$ と特定されます。

$a+b=1$ のときは，a，b は有理数なので，特定できません。

そこで，もういっちょ，今度は f(偶数)$=$(偶数) という全称命題に目をつけて

「$f(2)$ が偶数である必要があるよね」

と屁理屈を言えば，$f(2)=8a+2b=2(4a+b)$ が偶数である必要が出てきます。

すなわち $4a+b$ が整数である必要が出てきます。

先ほど同様 a，b は範囲が限られていますから，範囲を絞ると $0<4a+b\leqq 3$ を得て

$$4a+b=1,\ 2,\ 3$$

となります。

あとは，$a+b=1$ と連立をして，a，b が特定されます。

これを処理すると，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ を得ますので，先ほどの $a=b=1$ と併せて考えると

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

という候補が得られます。

あとは，これらの候補がきちんと題意を満たすのかということを確かめることになります。

その際は整数問題の基本手法「余りで分類」という態度で進めます。

【解答】

$f(1)=a+b$ が整数となる必要がある。

条件 $0<a\leqq 1$，$0<b\leqq 1$ より，$0<a+b\leqq 2$ なので，$a+b=1$ または 2

(i) $a+b=2$ のとき

条件 $0<a\leqq 1$，$0<b\leqq 1$ より，$a=1$，$b=1$ となるしかない。

(ii) $a+b=1$ のとき

さらに

$$\begin{aligned} f(2)&=8a+2b \\ &=2(4a+b) \end{aligned}$$

で，これが偶数となる必要がある。

したがって，$4a+b$ が整数となる必要がある。

$a\leqq b$ より，$a+a\leqq a+b\ (=1)$ で，これより $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

また，$0<b\leqq 1$ なので，$0<4a+b\leqq 3$

ゆえに，$4a+b=1$ または 2 または 3

(ii−1) $4a+b=1$ のとき

$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=1 \end{cases}$ を満たす a，b は $(a,\ b)=(0,\ 1)$ で $a>0$ に反する。

(ii−2) $4a+b=2$ のとき

$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=2 \end{cases}$ を満たす a，b は $(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

(ii−3) $4a+b=3$ のとき

$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=3 \end{cases}$ を満たす a，b は $(a,\ b)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ で $a\leqq b$ に反する。

(i)，(ii) から，求める $(a,\ b)$ の候補は $(a,\ b)=(1,\ 1)$，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ に限られる。

（Ⅰ） $(a\,,\,b)=(1\,,\,1)$ のとき

$f(n)=n^3+n$ であり，

$$n \text{ が整数} \Longrightarrow f(n) \text{ が整数}$$

という命題は正しい。

また，m を整数として，

$$\begin{aligned} f(2m)&=8m^3+2m\\ &=2m(4m^2+1)\end{aligned}$$

より，

$$n \text{ が偶数} \Longrightarrow f(n) \text{ が偶数}$$

という命題も正しい。

（Ⅱ） $(a\,,\,b)=\left(\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} f(n)&=\frac{1}{3}n^3+\frac{2}{3}n\\ &=\frac{n(n^2+2)}{3}\end{aligned}$$

分子が 3 で割り切れるかどうかを調べるにあたり，n を 3 で割った余りで分類します。

k を整数として

$$\begin{aligned} f(3k)&=\frac{3k(9k^2+2)}{3}\\ &=k(9k^2+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3k\pm1)&=\frac{(3k\pm1)\{(3k\pm1)^2+2\}}{3}\\ &=\frac{(3k\pm1)(9k^2\pm6k+3)}{3}\\ &=(3k\pm1)(3k^2\pm2k+1) \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

よって，

$$n \text{ が整数} \Longrightarrow f(n) \text{ が整数}$$

という命題は正しい。

また，

$$\begin{aligned} f(2m)&=\frac{2m(4m^2+2)}{3}\\ &=\frac{4m(2m^2+1)}{3}\end{aligned}$$

先ほど同様 m を 3 で割った余りで分類します。

ℓ を整数として

（Ⅱ－1） $m=3\ell$ のとき

$$\begin{aligned} f(2m)&=\frac{12\ell(18\ell^2+1)}{3}\\ &=4\ell(18\ell^2+1)\end{aligned}$$

（Ⅱ－2） $m=3\ell\pm1$ のとき

$$\begin{aligned} f(2m)&=\frac{4(3\ell\pm1)\{2(3\ell\pm1)^2+1\}}{3}\\ &=\frac{4(3\ell\pm1)(18\ell^2\pm12\ell+3)}{3}\\ &=4(3\ell\pm1)(6\ell^2\pm4\ell+1) \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

より，

$$n \text{ が偶数} \Longrightarrow f(n) \text{ が偶数}$$

という命題も正しい。

以上から求める a，b の組は

$$(a\,,\,b)=(1\,,\,1),\ \left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{3}\right) \cdots \text{答}$$

【総括】

第３講ともなると，全称命題に関する流れは掴めているはずです。

全称命題という山場をクリアーし，むしろこの問題の趣旨は「整数問題の手法の運用」であると思えれば，全称命題が自分の中で「当たり前の処理」と思えている証拠です。

a，b が有理数という設定に固執して
$a=\dfrac{q}{p}$ (p，q は互いに素な自然数) $b=\dfrac{s}{r}$ (r，s は互いに素な自然数)
などとすると，かえって泥沼にはまるかもしれません。

自ら文字数を増やしに行く方針はなるべくなら避けたいと思うのが普通です。