全ての正の整数 n に対して，5^n+an+b が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数 a，b を求めよ。

＜ ’97 一橋大 ＞

【戦略】

問題文で与えられたシチュエーションをそのまま $5^n+an+b=16K$ などと表しても，身動きがとれないでしょう。

全称命題と捉えて $a_n=5^n+an+b$ に対して屁理屈をかましていきます。

a，b という未知数が 2 つあることを考えて，

「a_1，a_2 が 16 の倍数になる必要があるよね？」

として $\begin{cases} a+b+5=16M \\ 2a+b+25=16N \end{cases}$ **を得ます。**

この後は $1\leqq a\leqq 16$，$1\leqq b\leqq 16$ という範囲を利用して，絞り込みをします。

分かりやすいのは連立方程式を解いてしまう方針でしょうか。

$a=16(N-M)-20$，$b=16(2M-N)+15$ **として，$1\leqq a\leqq 16$，$1\leqq b\leqq 16$ を用いて絞り込んでしまいます。**

これにより，$a=12$，$b=15$ を得ます。

ただ，これはあくまで，a_1，a_2 を 16 の倍数にするような a，b で，a_3，a_4，$\cdots$ とこの先も 16 の倍数になる保証はありませんから，それを証明することになります。

有力な方針はやはり数学的帰納法でしょう。

【解答】

$a_n=5^n+an+b$ とおく。

$a_1=5+a+b$ ，$a_2=25+2a+b$ で，a_1，a_2 が 16 の倍数となる必要があるので

$$\begin{cases} a+b+5=16M & \cdots ① \\ 2a+b+25=16N & \cdots ② \end{cases} \quad (M,\ N \text{は整数})$$

と表せる。

②−① より，$a+20=16(N-M)$

すなわち $a=16(N-M)-20$ …(☆)

$1\leqq a\leqq 16$ より，$1\leqq 16(N-M)-20\leqq 16$

$21\leqq 16(N-M)\leqq 36$ であり，21 以上 36 以下の 16 の倍数は 32

ゆえに，$16(N-M)=32$ で，$N-M=2$

(☆) より，$a=12$

一方，①×2−② より，$b-15=16(2M-N)$

すなわち $b=16(2M-N)+15$ …(★)

$1\leqq b\leqq 16$ より，$1\leqq 16(2M-N)+15\leqq 16$

$-14\leqq 16(2M-N)\leqq 1$ であり，−14 以上 1 以下の 16 の倍数は 0

ゆえに，$16(2M-N)=0$ で，$2M-N=0$

(★) より，$b=15$

以上から $a_n=5^n+12n+15$

このとき，全ての自然数 n に対して

a_n が 16 の倍数 …(＊)

であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=5+12+15=32\,(=16\times 2)$ で (＊) は正しい。

(ii)　$n=k\ (k=1,2,3,\cdots)$ のとき

a_k が 16 の倍数，すなわち $5^k+12k+15=16m$（m は整数）と仮定する。

このとき，
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5^{k+1}+12(k+1)+15 \\ &= 5\cdot 5^k+12k+27 \\ &= 5(16m-12k-15)+12k+27 \\ &= 80m-48k-48 \\ &= 16(5m-3k-3) \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも (＊) は正しい。

以上から，全ての自然数 n に対して (＊) は正しい。

ゆえに，求める a，b の値は $a=12$，$b=15$ …答

【戦略 2】 十分性の証明について

第２講でも出てきた指数変数が入り混じっている倍数証明です。

一般項のまま帰納法を用いる路線に対して，漸化式を用いる路線も考えてみます。

そのために，$a_n=5^n+12n+15$ が満たす漸化式を作ります。

$a_n=5^n+12n+15$ **の番号を 1 つ上げて，**$a_{n+1}=5^{n+1}+12n+27$

5^n **を消去して，**$\dfrac{a_{n+1}-12n-27}{a_n-12n-15}=\dfrac{5^{n+1}}{5^n}=5$ **となりますから**

$a_{n+1}-12n-27=5a_n-60n-75$，**すなわち**

$$a_{n+1}=5a_n-48n-48$$

を得ます。

【解 2】 $a_n=5^n+12n+15$ が 16 の倍数であることの証明について

$a_n=5^n+12n+15$ の番号を 1 つ上げて，$a_{n+1}=5^{n+1}+12n+27$

5^n を消去する。

$$\frac{a_{n+1}-12n-27}{a_n-12n-15}=\frac{5^{n+1}}{5^n}=5$$

これより，$a_{n+1}-12n-27=5a_n-60n-75$，すなわち

$$a_{n+1}=5a_n-48n-48$$

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=32$（$=16\times2$）であり，a_1 は 16 の倍数。

(ii)　$n=k$（$k=1,2,\cdots$）のとき

$a_k=16L$（L は整数）と仮定する。

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=5a_k-48k-48\\&=5\cdot16L-16\cdot3k-16\cdot3\\&=16(5L-3k-3)\end{aligned}$$

となり，a_{k+1} も 16 の倍数となる。

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して a_n は 16 の倍数である。

【戦略 3】

$a_n=5^n+12n+15$ **が 16 の倍数であることを示すにあたり，n 乗の部分を二項展開によって進めていく方針も考えられます。**

$5^n=(4+1)^n$ **と見て，後半の項である $12n+15$ と合わせて考えれば 16 で括れることになります。**

【解 3】 $a_n=5^n+12n+15$ が 16 の倍数であることの証明について

$n\geqq3$ のとき

4^2 以降が残るのは $n\geqq3$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=5^n+12n+15\\&=(4+1)^n+12n+15\\&=4^n+{}_n\mathrm{C}_1\,4^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\,4^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}\,4^2+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,4^1+1^n+12n+15\\&=16\left(4^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\,4^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_2\,4^{n-4}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}\right)+4n+1+12n+15\\&=16\cdot(\text{整数})+16n+16\\&=16\cdot(\text{整数})\end{aligned}$$

となり，a_n は 16 の倍数。

$a_1=5+12+15=32$（$=16\times2$），$a_2=5^2+12\cdot2+15=64$（$=16\times4$）

も併せて考えると，$n=1,2,3,\cdots$ に対して a_n は 16 の倍数である。

【総括】

第 2 講では最初から一般項が与えられていましたが，本問はもう少し整数問題要素が強い問題です。

第 2 講でも述べたことですが，全称命題と見抜き，屁理屈を述べた後は分野の常識力が問われます。

今回は整数問題の有力方針の１つである「範囲を絞る（評価する）」という態度です。

また，$a_n=5^n+12n+15$ が 16 の倍数となることの証明に関しては第２講同様に

「一般項を扱う」

「漸化式を扱う」

のいずれかの路線で進めていけばよいでしょう。