整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$（$n=1，2，3，\cdots$）のすべてを割り切る素数を求めよ。

＜ ’86 東京工業大 ＞

【戦略】

a_n をいじくって，$a_n=p\times$(整数) という形に辿り着ければ，直接的に素数 p が分かるのでしょうが，パッと見てその見通しは立ちません。

全称命題だということを考えて，

「a_1 だって割り切らなければいけないよね？」

と屁理屈を言います。

$a_1=19^1+(-1)^0 2^1=21$（$=7\times3$）なので，a_1 を割り切る素数は 7 か 3 です。

この時点でこの問題の答えの候補は 7 か 3 です。

この先ずっと 7 と 3 で割り切れるのか，はたまたどちらかがドロップアウトするのか，という気持ちで次の屁理屈

「a_2 だって割り切らなければいけないよね？」

とします。

$a_2=19^2+(-1)^1 2^5=329$（$=7\times47$）なので，候補は 7 のみに絞られます。

もうこの時点でこの問題の答えの候補は 7 しかありません。

そこで，全ての自然数 n に対して a_n が 7 の倍数であることを示す方向に照準が定まります。

（もしかしたら疑い深い人は『いやいや，この先も 7 の倍数になる保証はないから，そんな素数はないかもよ』という人もいるかもしれません。そんな人は気が済むまで a_3，$a_4\cdots$ を計算してください。やっぱ答えは 7 しかないと納得するまで実験してみることが大切です）

方向性さえ決まればあとはその証明の手立てを考えますが，思いつきやすい有力方針と言えば数学的帰納法でしょう。

【解答】

$$\begin{aligned} a_n &= 19^n+(-1)^{n-1}\cdot2\cdot2^{4n-4} \\ &= 19^n+(-1)^{n-1}\cdot2\cdot16^{n-1} \\ &= 19^n+2(-16)^{n-1} \end{aligned}$$

$$a_1=19^1+2\cdot(-16)^0=21\ (=7\times3)$$
$$a_2=19^2+2(-16)^1=329\ (=7\times47)$$

であることから，すべての自然数 n に対して a_n を割り切る素数があるとするならば，その候補は 7 しかない。

すべての自然数 n に対して a_n が 7 の倍数であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=19^1+2\cdot(-16)^0=21$（$=7\times3$）より a_1 は 7 の倍数

(ii)　$n=k$（$k=1，2，3，\cdots$）のとき

$a_k=7M$，すなわち $19^k+2(-16)^{k-1}=7M$（M は整数）と仮定する。

このとき，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 19^{k+1}+2(-16)^k \\ &= 19^{k+1}+(-16)\cdot2(-16)^{k-1} \\ &= 19^{k+1}-16(7M-19^k) \\ &= 19^k(19+16)-16\cdot7M \\ &= 7\cdot5\cdot19^k-16\cdot7M \\ &= 7(5\cdot19^k-16M) \end{aligned}$$

となり，a_{k+1} も 7 の倍数

(i)，(ii) から すべての自然数 n に対して a_n が 7 の倍数であることが示された。

以上から求める素数は 7 である。… 答

【戦略 2】

上級問題になると，「漸化式を漸化式のまま扱う（一般項に触れない）」という態度で話を進めることが多くなります。

今回，$a_n=19^n+2(-16)^{n-1}$ という「一般項」が与えられています。

$x^2+sx+t=0$ **が異なる 2 解** $\alpha,\ \beta$ **をもつとき**

$a_{n+2}+s\,a_{n+1}+t\,a_n=0$ **という 3 項間漸化式の一般解は**

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n\ \ (\alpha,\ \beta \text{ は } x^2+sx+t=0 \text{ の 2 解})$$

という形をしていることを考えると，今回の $a_n=19^n+2(-16)^{n-1}$ **で与えられる数列** $\{a_n\}$ **が満たす漸化式は** $a_{n+2}+s\,a_{n+1}+t\,a_n=0$ **の形だと予想されますから，漸化式を Get してから数学的帰納法に走りたいと思います。**

【解 2】 a_n が 7 の倍数であることを示す部分的別解

$a_n=19^n+2(-16)^{n-1}$ より，$\begin{cases} a_{n+2}=19^{n+2}+2(-16)^{n+1} \cdots ① \\ a_{n+1}=19^{n+1}+2(-16)^n \cdots ② \\ a_n=19^n+2(-16)^{n-1} \cdots ③ \end{cases}$

①，② から $(-16)^n$ を消去する。

$\begin{cases} a_{n+2}-19^{n+2}=2(-16)^{n+1} \\ a_{n+1}-19^{n+1}=2(-16)^n \end{cases}$ より，$\dfrac{a_{n+2}-19^{n+2}}{a_{n+1}-19^{n+1}}=\dfrac{2(-16)^{n+1}}{2(-16)^n}$

すなわち $a_{n+2}-19^{n+2}=-16(a_{n+1}-19^{n+1})$

よって，$a_{n+2}+16a_{n+1}=19^{n+1}(19+16)$

これより $a_{n+2}+16a_{n+1}=35\cdot19^{n+1} \cdots ④$

②，③ から $(-16)^{n-1}$ を消去する。

$\begin{cases} a_{n+1}-19^{n+1}=2(-16)^n \\ a_n-19^n=2(-16)^{n-1} \end{cases}$ より，$\dfrac{(a_{n+1}-19^{n+1})}{a_n-19^n}=\dfrac{2(-16)^n}{2(-16)^{n-1}}$

すなわち，$a_{n+1}-19^{n+1}=-16(a_n-19^n)$

先ほど同様に $a_{n+1}+16a_n=35\cdot19^n \cdots ⑤$ を得る。

④，⑤ より 19^n を消去する。

$\dfrac{a_{n+2}+16a_{n+1}}{a_{n+1}+16a_n}=\dfrac{35\cdot19^{n+1}}{35\cdot19^n}\ (=19)$

$a_{n+2}+16a_{n+1}=19(a_{n+1}+16a_n)$

これより，$a_{n+2}=3a_{n+1}+304a_n$ を得る。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=21(=7\cdot3)$，$a_2=329(=7\cdot47)$ より

$n=1,\ 2$ のときには a_n は 7 の倍数。

(ii) $n=k,\ k+1\ (k=1,2,\cdots)$ のとき

a_k，a_{k+1} が 7 の倍数だと仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+2}&=3a_{k+1}+304a_k \\ &=3\cdot(7\text{ の倍数})+304\cdot(7\text{ の倍数}) \\ &=(7\text{ の倍数}) \end{aligned}$$

となり，a_{k+2} も 7 の倍数となる。

(i)，(ii) より a_n は 7 の倍数である。

【戦略 3】

【解 2】における ⑤ が Get できた時点で

$a_{n+1}=-16a_n+7\cdot5\cdot19^n$ **ですから，a_n が 7 の倍数と仮定すれば即座に** a_{n+1} **も 7 の倍数であることが言えます。**

【解 3】 a_n が 7 の倍数であることを示す部分的別解

$a_n=19^n+2(-16)^{n-1}$ より，$\begin{cases} a_{n+1}-19^{n+1}=2(-16)^n \\ a_n-19^n=2(-16)^{n-1} \end{cases}$

これより，$\dfrac{(a_{n+1}-19^{n+1})}{a_n-19^n}=\dfrac{2(-16)^n}{2(-16)^{n-1}}$

すなわち，$a_{n+1}-19^{n+1}=-16(a_n-19^n)$

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-16a_n+19^n(19+16) \\ &=-16a_n+35\cdot19^n \end{aligned}$$

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=21(=7\cdot3)$，$a_2=329(=7\cdot47)$ より

$n=1,\ 2$ のときには a_n は 7 の倍数。

(ii) $n=k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

a_k が 7 の倍数であると仮定し，$a_k=7m$ （m は整数）とおくと

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=-16a_k+35\cdot19^k \\ &=-16\cdot7m+7\cdot5\cdot19^k \\ &=7(-16m+5\cdot19^k) \end{aligned}$$

となり，a_{k+1} も 7 の倍数

(i)，(ii) より a_n は 7 の倍数である。

【戦略 4】

n 乗についての扱いとしては二項展開での式変形も考えられます。

簡単な例題を出します。

「8^n-1 は 7 の倍数であることを示せ」

という問題だと

$$\begin{aligned}(7+1)^n-1&={7^n}+{}_n\mathrm{C}_1 7^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 7^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}7+1^n-1\\&=(7\text{の倍数})\end{aligned}$$

と見ます。

あるいは $(7+1)^n-1\equiv 1^n-1=0\pmod 7$ **と見てもいいでしょう。**

さて，今回の $19^n+2(-16)^{n-1}$ **をどう見るかですが**

$19+16=35\,(=7$ の倍数$)$ **ということを活かすのが 1 つの手でしょうか。**

【解 3】 a_n が 7 の倍数であることを示す部分的別解

以下，合同式における法は 7 とする。

$$\begin{aligned}a_n&=(35-16)^n+2(-16)^{n-1}\\&\equiv(-16)^n+2(-16)^{n-1}\\&=(-16)\cdot(-16)^{n-1}+2(-16)^{n-1}\\&=-14\cdot(-16)^{n-1}\\&\equiv 0\end{aligned}$$

となり，a_n は 7 の倍数である。

【総括】

まずは全称命題であるということをしっかりと捉えて題意の素数が 7 であろうことを予想したいところです。

それさえ見抜けば，a_n が 7 の倍数であることを示すという問題になります。

今回の a_n が 7 の倍数であることの証明については

- a_n(一般項) のまま扱う
- 漸化式を扱う

という 2 路線あります。

本問のように一般項が与えられている状態から漸化式を作成しにいくのは最初はトリッキーに見えるかもしれませんが，一般項は役立たずだから一般項よりも漸化式を優先する問題も多々あり，「漸化式を漸化式のまま扱う」というセオリーもあるぐらいです。

（実際本問の帰納法についても一般項の状態で帰納法を使うより，漸化式がある状態で帰納法を使った方が楽ですね。）

このように，全称命題の山場は冒頭の部分にあり，そこを乗り越えれば，あとは分野ごとの対応力が問われてくることが多いです。