x，y，z，w を正の数とする。任意の正の整数 m，n に対して

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}}\right)^n+\left(z^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}}\right)^n=\left\{\left(x^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ。

＜ ’90 東京工業大 ＞

【戦略】

非常に目がチカチカします。

n 乗だからといって二項定理などでほぐす方針は茨の道どころか樹海への道です。

全ての $\boxed{\quad}$ に対して $\boxed{\quad}$ が成り立つ

という命題のことを全称命題と言い，全称命題の倒し方は経験がないと中々難しく，下手をすると白紙になりかねません。

任意の n，m で成立するのだから，当然 $n=2$，$m=1$ のときにも成立する ” 必要がある ”わけです。このことから，必要条件が浮かび上がってきます。（先に結論から言うと $xw=yz$ が浮かび上がってきます）

「任意の n，m で成り立つ？じゃあ $n=2$，$m=1$ でも成り立つよね？」と意地悪な屁理屈を言うわけです。

ただし，これは

任意の n，m で成立 $\Longrightarrow$ $n=2$，$m=1$ でも成立 $\Longrightarrow$ $xw=yz$

と出しただけであって，

「$xw=yz \Longrightarrow$ 任意の n，m で成立」

ということまで言わないと必要十分条件とは言えませんから，この十分性の確認をしっかりとってください。

” 全ての ”，” 任意の ”，” どんな ” といった類いのキーワードはこの全称命題を疑って，屁理屈を言ってみると道が拓けることが多いです。

注意

この屁理屈はできる限り簡単な屁理屈，今回だと

「$n=1$，$m=1$ でも成り立つよね」

と言いたいところですが，$n=1$，$m=1$ とすると

$$(\text{左辺})=x+y+z+w \ ,(\text{右辺})=x+y+z+w$$

という当たり前の式が出てきてしまいますから，もう少し厳しく $n=2$，$m=1$ を持ち出すというわけです。

$\dfrac{\bigcirc}{m}$ 乗（m 乗根）の形で屁理屈を言うなら，$m=1$（１乗根）にしておきたいですからね。

【解答】

$n=2$，$m=1$ でも成立する必要があるので

$$(x+y)^2+(z+w)^2=\left\{(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}+(y^2+w^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$
$$=(x^2+z^2)+(y^2+w^2)+2\left\{(x^2+z^2)(y^2+w^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

これを整理すると

$$xy+zw=(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(y^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$$

両辺２乗すると

$$(xy+zw)^2=(x^2+z^2)(y^2+w^2)$$

$$x^2y^2+2xyzw+z^2w^2=x^2y^2+x^2w^2+z^2y^2+z^2w^2$$

$$x^2w^2-2xyzw+y^2z^2=0$$

$$(xw-yz)^2=0$$

$$\therefore\ xw=yz$$

逆にこのとき $\dfrac{x}{y}=\dfrac{z}{w}=k\ (>0)$ とおくと，$x=yk$，$z=wk$

与えられた等式の左辺は

$$\left\{(yk)^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{m}}\right\}^n+\left\{(wk)^{\frac{1}{m}}+w^{\frac{1}{m}}\right\}^n$$
$$=\left\{y^{\frac{1}{m}}\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)\right\}^n+\left\{w^{\frac{1}{m}}\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)\right\}^n$$
$$=y^{\frac{n}{m}}\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)^n+w^{\frac{n}{m}}\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)^n$$
$$=\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)^n\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)$$

一方与えられた等式の右辺は

$$\left[\left\{(yk)^{\frac{n}{m}}+(wk)^{\frac{n}{m}}\right\}^{\frac{1}{n}}+\left\{y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]^n$$

$$=\left[\left\{k^{\frac{n}{m}}\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}+\left\{y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]^n$$

$$=\left[k^{\frac{1}{m}}\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n$$

$$=\left[\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)\right]^n$$
$$=\left(y^{\frac{n}{m}}+w^{\frac{n}{m}}\right)\left(k^{\frac{1}{m}}+1\right)^n$$

となり，与えられた等式が成立する。

以上から求める必要十分条件は $xw=yz$ …答

【総括】

仰々しい形をしており，一見ギョッとしますが，よくよく観察してみると m は飾りにすぎません。

$X=x^{\frac{1}{m}}$ ，$Y=y^{\frac{1}{m}}$ ，$Z=z^{\frac{1}{m}}$ ，$W=w^{\frac{1}{m}}$ とおくと，x，y，z，w が任意の正の数であるとき，X，Y，Z，W も任意の正の数ですから，結局の問題は

X，Y，Z，W を正の数としたとき，任意の正の整数 n に対して

$$(X+Y)^n+(Z+W)^n=\left\{(X^n+Z^n)^{\frac{1}{n}}+(Y^n+W^n)^{\frac{1}{n}}\right\}^n$$

が成り立つ必要十分条件を求める

という問題に帰着します。先ほどの解答同様全称命題と捉えて

$n=2$ でも成立する必要があるということから

$$XW=YZ$$

という「必要条件」を得ます。

この後は【解答】と同様に十分性を確認して答えとしての資格を得るわけです。

もちろん，$x^{\frac{1}{m}}w^{\frac{1}{m}}=y^{\frac{1}{m}}z^{\frac{1}{m}}$ ，すなわち $(xw)^{\frac{1}{m}}=(yz)^{\frac{1}{m}}$ ということになりますから，求める必要十分条件は $xw=yz$ ということになります。

全称命題の問題を解くためには

全称命題だということをまずは見抜いて意識する

全称命題特有の議論の進め方
（『じゃあ…』と屁理屈を言って必要条件を出し，十分性を確認する）
をきちんとマスターする

ということが必要であり，難関大を目指すにあたりしっかりと準備したい話題です。

参考 ～本問の趣旨からは外れますが…～

a_1，a_2，…，$a_N\geqq 0$　b_1，b_2，…，$b_N\geqq 0$ ，$p>0$ に対して

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\left\{\sum_{k=1}^{N}(a_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{k=1}^{N}(b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

等号成立は
$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_N}{b_N}$ （※ $b_k=0$ のときは $a_k=0$ とする）
のとき

※ 本当は N ではなく文字的には n の方がシックリくるのですが，本問で n が使われてしまっているので，混乱を避けるために N という文字を使用します。

これをミンコフスキーの不等式と言います。（証明はここでは割愛します）（入試的にはミンコフスキーの不等式そのものを覚えておく必要はありませんし，ミンコフスキーの不等式が決め手となるような問題を入試においてノーヒントで出題してくることがあったとしたら個人的には大悪問だと思います。）

$N=2$ としてみると

$$\left\{(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq(a_1{}^p+a_2{}^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1{}^p+b_2{}^p)^{\frac{1}{p}}$$

で，両辺 p 乗すると，左辺，右辺はともに 0 以上なので

$$(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p\leqq\left\{(a_1{}^p+a_2{}^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1{}^p+b_2{}^p)^{\frac{1}{p}}\right\}^p$$

を得ます。

先ほどの【総括】で使った文字で言えば

$$(X+Y)^n+(Z+W)^n\leqq\left\{(X^n+Z^n)^{\frac{1}{n}}+(Y^n+W^n)^{\frac{1}{n}}\right\}^n$$

ということになります。

つまり，本問は天から突然降ってきたわけではなく，

「ミンコフスキーの不等式の $N=2$ のときの等号成立条件」

が問われていたということが言えます。

繰り返しになりますが，入試においてはミンコフスキーの不等式そのものを覚える必要はありません。

あくまで本問は「全称命題に対する対応」を学ぶための問題です。