

$n$  を正の整数とする。複素数  $z_1, z_2, \dots$  を

$$z_1 = a + bi \quad (a > 0, b > 0)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2} \bar{z}_n$$

で定める。ただし、 $\bar{\alpha}$  は  $\alpha$  の共役な複素数を表す。

$z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  とおくと、次の問に答えよ。

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$  であること、及び  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$  は発散することを証明せよ。
- (2) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n}$  を求めよ。
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$  を求めよ。

< 自作 >

【戦略】

実数の 2 項間漸化式と違い、機械的な処理でどうなる類の問題ではないことは分かると思います。

複素数の問題では

「実部、虚部を持ち出すかどうか」

というのは方針決定上大きな選択となります。

実部虚部を持ち出すと実平面 ( $xy$  平面) の話に戻着されることが多いため、そこから自分の守備範囲内の処理で処理することが可能となることが多いと思います。

困ったら実部虚部を置いてみることも 1 つの策です。

ただし、一般的には実部虚部を持ち出すと計算量が膨らみがちなので、そこは覚悟すべきです。

(1) は実部虚部を持ち出しても、さほど困るような計算量にはならないですから、そのまま処理しきってしまうのが早いでしょう。

(2) は  $\sin \theta_n = \frac{y_n}{r_n}$  なので、

$$\frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n} = \frac{\frac{y_{n+1}}{r_{n+1}}}{\frac{y_n}{r_n}} = \frac{y_{n+1}}{y_n} \cdot \frac{r_n}{r_{n+1}}$$

を得ることになります。

(1) の導出過程から  $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2}$  となりますから

(2), (3) どちらかが解決できればもう一方も解決でしょう。

様々な方針があると思いますが、与えられている漸化式を図形的にとらえて視覚化して何か関係性を探っていきたいと思います。

正弦定理、余弦定理などですが、基本的に 2 乗を登場させるのは嫌なので試しに正弦定理で考えてみます。

幾何的な方針を取った以上、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{完走できれば OK} \\ \text{完走できなければ引き返す} \end{array} \right.$  というように

試行錯誤する覚悟は必要です。

【解答】

$x_n, y_n$  を実数として  $z_n = x_n + y_n i$  とおくと、

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (x_n + y_n i) + \frac{1}{2}(x_n - y_n i) \\ &= \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n i \end{aligned}$$

$z_{n+1}$  の虚部が  $y_{n+1}$  なので、 $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$

大きい方から近づきます。

これより、 $y_n = y_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = b \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +0 \dots \textcircled{1}$

すなわち、 $z_n$  は正の実数に限りなく近づいていくことになり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$$

$z_{n+1}$  の実部が  $x_{n+1}$  なので、 $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n$

これより、 $x_n = x_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = a \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$  より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \dots \textcircled{2}$

$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$  で、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$  は発散する。

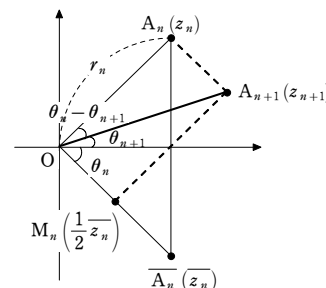
(2)  $z_1$  は複素数平面上において第 1 象限にあるということを考えると、(1) の漸化式の結果より、 $x_n > 0, y_n > 0$

$z_1, z_2, \dots$  は常に第 1 象限にあり、 $z_n, z_{n+1}$  の位置関係は以下のように図示できる。

$\triangle OA_{n+1}M_n$  で正弦定理を用いて

$$\frac{r_n}{\sin(\theta_{n+1} + \theta_n)} = \frac{\frac{1}{2}r_n}{\sin(\theta_n - \theta_{n+1})}$$

$$\sin(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{1}{2} \sin(\theta_{n+1} + \theta_n)$$



$$\sin \theta_n \cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n \sin \theta_{n+1} = \frac{1}{2} (\sin \theta_{n+1} \cos \theta_n + \cos \theta_{n+1} \sin \theta_n)$$

分母を払って整理すると、 $\cos \theta_{n+1} \sin \theta_n = 3 \sin \theta_{n+1} \cos \theta_n$

$$\text{ゆえに、} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n} = \frac{\cos \theta_{n+1}}{3 \cos \theta_n}$$

これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta_{n+1}}{3 \cos \theta_n} = \frac{1}{3}$  ( $\because$  (1) より)  $\dots \textcircled{3}$

$$(3) \sin \theta_n = \frac{y_n}{r_n} \text{ なので、} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n} = \frac{\frac{y_{n+1}}{r_{n+1}}}{\frac{y_n}{r_n}} = \frac{y_{n+1}}{y_n} \cdot \frac{r_n}{r_{n+1}}$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{y_{n+1}}{y_n} \cdot \frac{\sin \theta_n}{\sin \theta_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{3}{2} \dots \textcircled{4}$$

【戦略2】(3)について

$\triangle OA_n A_{n+1}$  で正弦定理を用いると、 $r_{n+1}$  と  $r_n$  の比を立式できる形が現れます。

【解2】(3)

$\triangle OA_n A_{n+1}$  で正弦定理を用いると

$$\frac{r_{n+1}}{\sin\{\pi - (\theta_n - \theta_{n+1}) - (\theta_n + \theta_{n+1})\}} = \frac{r_n}{\sin(\theta_n + \theta_{n+1})}$$

左辺の分母は  $\sin\{\pi - (2\theta_n)\} = \sin 2\theta_n$  に注意して整理すると、

$$r_{n+1} \sin(\theta_n + \theta_{n+1}) = r_n \sin 2\theta_n$$

$$r_{n+1} (\sin \theta_n \cos \theta_{n+1} + \cos \theta_n \sin \theta_{n+1}) = r_n \sin 2\theta_n$$

両辺  $\sin \theta_n$  で割ると、

$$r_{n+1} \left( \cos \theta_{n+1} + \cos \theta_n \cdot \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n} \right) = r_n \frac{\sin 2\theta_n}{\sin \theta_n}$$

$$\text{ゆえに、} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\frac{\sin 2\theta_n}{\sin \theta_n}}{\cos \theta_{n+1} + \cos \theta_n \cdot \frac{\sin \theta_{n+1}}{\sin \theta_n}}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}}{\frac{\sin \theta_n}{\theta_n}} \\ = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$(1), (2) \text{ の結果から, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \dots \text{ 答}$$

【総括】

複素数平面を題材に、漸化式を視覚化するような問題を作れないかというところから出発して作った問題です。

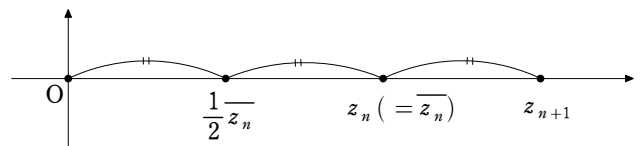
結構ラフに作ったのはいいものの、考え出すと深みにハマってしまいました。

というのも、「どこまでを直感的に認めてよいのか」という問題があったからです。

例えば、(3)の結果はよくよく考えてみると当たり前前の結果です。

$n$  が十分大きいとき、 $z_n$  はほぼ実数ですから、下の図のように

$$r_{n+1} = \frac{3}{2} r_n \text{ と予想できます。}$$



ただし、極限の証明問題では直感に頼る解答は危険ですからきちんと解答のように証明する必要があるでしょう。

このように、使ってよい(認めてよい)ものの基準を緩くラフに考えれば

【解答】以外にも多くの別解が考えられると思います。

【解答】は自分の中で上述した基準を厳し目に考えて作ったものです。