2 点 P，Q が 1 辺の長さが 1 の立方体の頂点間を毎回次のルールで移動をする。

・P，Q は各々がいる頂点から出ている 3 本の辺のうち 1 本を無作為に選び，その辺と繋がっている頂点へ同じ速さで距離 1 移動する。

最初 P，Q は立方体の対角線上にある状態からスタートする。また，P，Q が同じ辺上を互いに逆向きに移動したとき，P，Q がすれ違うと呼ぶことにする。$n$ を正の整数とするとき，次の問に答えよ。

(1) $n$ 回目の移動後に P，Q が立方体の対角線上にある状態となっている確率 $a_n$ を求めよ。

(2) $n$ 回目の移動において， P，Q がすれ違わない確率 $p_n$ を求めよ。

(3) $n$ 回の移動において，P，Q が一度もすれ違わない確率 $q_n$ を求めよ。

＜自作＞

**【戦略】**

**(1) の設問を足掛かりに P，Q の相対的な位置関係が**

**状態 A：対角線上にある状態**
**状態 B：隣り合う頂点にいる状態**

**のいずれかであることを見抜きたいところです。**

**(1) でスポットが当たっているのは状態 A ですが，状態 B となる確率も同時に $b_n$ などと設定することで漸化式がスムーズに立式できます。**

**(2) は $n$ 回目の移動で状態 A なのか状態 B なのかを考えれば**

$$p_{n+1}=a_n\cdot 1+b_n\cdot\frac{8}{9}$$

**が得られます。(1) で求めた $a_n$ があれば $b_n$ ( $=1-a_n$ ) も分かりますから，解決です。**

**(3) は (2) と違って，スタートから $n$ 回目の移動全てにおいてすれ違わない確率ですから，今までと勝手が違います。**

**(2) を活用したいところですが，**

**$n$ 回目の移動ですれ違わない　かつ　その直後にすれ違わない**

**という翻訳ができません。**

**「その直後」というのが状態 A なのか状態 B なのかが分からないからです。**

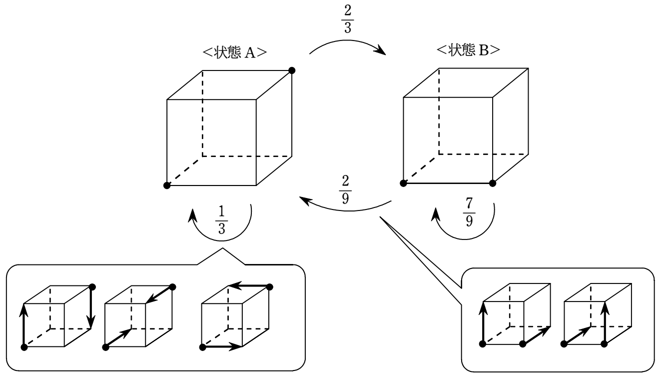
**ここは試行錯誤してほしいところですが**

**状態 A から $n$ 回の移動で一度も P，Q がすれ違わない確率を $q_n$**
**状態 B から $n$ 回の移動で一度も P，Q がすれ違わない確率を $q'_n$**

**と設定し，「最初の一手」で場合分けします。**

【解答】

(1) 相対的にみた 2 点の配置状態は次の 状態 A，状態 B の 2 種類のみであり，状態推移図は次のようになる。( P，Q の区別は無視する )




$n$ 回目の移動後に状態 A である確率が $a_n$ であり，
$n$ 回目の移動後に状態 B である確率を $b_n$ とすると

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{9}b_n \quad \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{7}{9}b_n \end{cases}$$

①，及び $a_n+b_n=1$ より $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{9}(1-a_n)$ で整理すると

$$a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n+\frac{2}{9}$$

これを変形すると $a_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{9}\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$ で，

$$\begin{aligned} a_n-\frac{1}{4}&=\left(a_1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \left(\because a_1=\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

したがって，$a_n=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}$ … 答

(2) $n=1，2，\cdots$ のとき

**状態 B からすれ違う確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ なので余事象を考える**

$$\begin{aligned} p_{n+1}&=a_n\cdot 1+b_n\cdot\frac{8}{9} \\ &=a_n+\frac{8}{9}(1-a_n) \\ &=\frac{1}{9}a_n+\frac{8}{9} \\ &=\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\right\}+\frac{8}{9} \\ &=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}+\frac{11}{12} \end{aligned}$$

$n=2，3，\cdots$ のとき $p_n=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}+\dfrac{11}{12}$

この式に $n=1$ を代入すると $p_1=1$ となり，1 回目の移動ですれ違うことはありえないため実際の結果と一致する。

したがって，$n=1，2，\cdots$ に対して $p_n=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}+\dfrac{11}{12}$ … 答

(3) 状態 A からスタートして $n$ 回の移動中，一度も P，Q がすれ違わない確率を $q_n$

状態 B からスタートして $n$ 回の移動中，一度も P，Q がすれ違わない確率を $q'_n$

とする。

＜ $q_{n+1}$ について ＞

状態A からスタートして

最初の移動で状態 A となってから残りの $n$ 回の移動ですれ違わない
または
最初の移動で状態 B となってから残りの $n$ 回の移動ですれ違わない

という事象に分けられるので，$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}q'_n$ …②

＜ $q'_{n+1}$ について ＞

状態 B からスタートして

最初の移動で状態 A となってから残りの $n$ 回の移動ですれ違わない
または
最初の移動ですれ違わずに状態 B となってから残りの $n$ 回の移動ですれ違わない

という事象に分けられるので，$q'_{n+1}=\frac{2}{9}q_n+\frac{2}{3}q'_n$ …③

②−③ より $q_{n+1}-q'_{n+1}=\frac{1}{9}q_n$ で，$q'_n=q_n-\frac{1}{9}q_{n-1}$

② に代入して，
$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}\left(q_n-\frac{1}{9}q_{n-1}\right)=q_n-\frac{2}{27}q_{n-1}$$

これより，$q_{n+2}-q_{n+1}+\frac{2}{27}q_n=0$ ($n=1，2，\cdots\cdots$) を得る。

$\alpha=\frac{9-\sqrt{57}}{18}$，$\beta=\frac{9+\sqrt{57}}{18}$ とおくと，

$$\begin{cases} q_{n+2}-\alpha q_{n+1}=\beta(q_{n+1}-\alpha q_n) \\ q_{n+2}-\beta q_{n+1}=\alpha(q_{n+1}-\beta q_n) \end{cases}$$ と 2 通りに変形できる。

これより，

$$q_{n+1}-\alpha q_n=(q_2-\alpha q_1)\beta^{n-1}$$

$$q_{n+1}-\beta q_n=(q_2-\beta q_1)\alpha^{n-1}$$

辺々ひくと，

$$(\beta-\alpha)q_n=(q_2-\alpha q_1)\beta^{n-1}-(q_2-\beta q_1)\alpha^{n-1} \quad \cdots ④$$

ここで，状態 A からスタートして 1 回の移動で P，Q がすれ違うことはないため，$q_1=1$

また，状態 A からスタートして 2 回の移動で P，Q が一度もすれ違わない確率 $q_2$ は，

1 回目の移動で状態 A のまま
または
1 回目の移動で状態 B となり，2 回目の移動ですれ違わない

となる確率で，$q_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{9}=\frac{25}{27}$ となる。

※ 状態 A からスタートすれば 1 回目の移動ですれ違うことはあり得ないため，$q_2=p_2=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{9}+\frac{11}{12}=\frac{100}{108}=\frac{25}{27}$
と考えてもよい。

④ に $q_1$，$q_2$ の値を代入すると

$$(\beta-\alpha)q_n=\left(\frac{25}{27}-\alpha\right)\beta^{n-1}-\left(\frac{25}{27}-\beta\right)\alpha^{n-1}$$

$\alpha=\frac{9-\sqrt{57}}{18}$，$\beta=\frac{9+\sqrt{57}}{18}$ を代入すると

$$\frac{\sqrt{57}}{9}q_n=\frac{23+3\sqrt{57}}{54}\beta^{n-1}-\frac{23-3\sqrt{57}}{54}\alpha^{n-1}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} q_n&=\frac{23+3\sqrt{57}}{6\sqrt{57}}\beta^{n-1}-\frac{23-3\sqrt{57}}{6\sqrt{57}}\alpha^{n-1} \\ &=\frac{171+23\sqrt{57}}{342}\beta^{n-1}+\frac{171-23\sqrt{57}}{342}\alpha^{n-1} \\ &=\frac{171-23\sqrt{57}}{342}\left(\frac{9-\sqrt{57}}{18}\right)^{n-1}+\frac{171+23\sqrt{57}}{342}\left(\frac{9+\sqrt{57}}{18}\right)^{n-1} \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

(3) は汚い数字となり，計算が合っているか不安になります。

仮想難関大というタイトルにしていますが，どこの大学を意識して作問しているかについては，問題を見ると分かる人には分かると思います。

今回意識したのは名古屋大学です。

名古屋大学は確率漸化式が十八番と言ってもよい大学で，名古屋大を目指すにあたっては避けては通れない分野です。

本問 (3) のように，名古屋大では確率の和が 1 とならないタイプは理系で 2017 年度，2018 年度，2020 年度と出題されており，近年では目立ちます。

もちろん確率の和が 1 となるタイプであればオーソドックスに倒せるように準備しているでしょうが，このような確率の和が 1 とならないタイプもしっかりと練習し，準備した上で臨んで下さい。